Probabilitas = Peluang

1. Pendahuluan

- Percobaan : proses yang menghasilkan data
- Ruang Contoh (S) : himpunan yang memuat semua kemungkinan hasil percobaan
- Kejadian = Event : himpunan bagian dari ruang contoh
- Titik Contoh: Anggota Ruang Contoh/Kejadian
- Konsep Dasar (Klasik) Peluang

  Peluang kejadian A dinotasikan sebagai P(A)

  Jika setiap titik contoh mempunyai peluang yang sama maka :

$$\boxed{P(A) = \frac{n}{N}}$$

n : banyak titik contoh penyusun Kejadian

N : banyak titik contoh dalam Ruang Contoh (S)

- Nilai Peluang Kejadian A $\rightarrow$ $0 \leq P(A) \leq 1$

  dan

  P (S) = 1 $\rightarrow$ Peluang Kejadian yang pasti terjadi

  P ($\varnothing$) = 0 $\rightarrow$ Peluang Kejadian yang pasti tidak terjadi

Contoh 1:

Percobaan: Pelemparan sebuah dadu setimbang (balanced) sebanyak 1 kali

S : {sisi-1, sisi-2, sisi-3, sisi-4, sisi-5, sisi-6} N = 6

Kejadian A: Munculnya sisi dadu bernilai GENAP dalam pelemparan sebuah dadu setimbang (balanced) sebanyak 1 kali

A {sisi-2, sisi-4, sisi-6} n = 3

Peluang kejadian A: $P(A) = \frac{n}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$

Contoh 2:

Percobaan: Pengambilan sebuah kartu secara acak dari satu set kartu Bridge, Ruang sampel gambar kartu tersebut

S: {J, Q, K, As, 2-10 Hati, J, Q, K, As, 2-10 Wajik, J, Q, K, As, 2-10 Klaver, J, Q, K, As, 2-10 Sekop} N = 52

Kejadian B: Munculnya kartu bergambar J

B: {J Hati. J Wajik, J Klaver, J sekop} n = 4

Peluang kejadian B: $P(B) = \frac{n}{N} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

2. Pencacahan Titik Contoh

Sub bab ini adalah mengenai perhitungan banyaknya anggota ruang contoh.

2.1 Kaidah Perkalian = Kaidah Penggandaan

Kaidah Perkalian:

Jika operasi ke-1 dapat dilakukan dalam n_1 cara
operasi ke-2 dapat dilakukan dalam n_2 cara
:
:
operasi ke-k dapat dilakukan dalam n_k cara

maka k operasi dalam urutan tersebut dapat dilakukan dalam
$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ cara

Contoh 2:
Berapa banyak bilangan 4 digit yang dapat dibentuk dari angka 3, 4, 6, 7, dan 8

a. jika semua angka boleh berulang?
$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

b. jika angka tidak boleh berulang?
$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

c jika bilangan tersebut: GANJIL dan angka tidak boleh berulang?
$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$

d. Berapa peluang bilangan yang muncul adalah bilangan GANJIL dan angka tidak berulang (lihat Kejadian c) pada kondisi pembentukan bilangan 4 digit, angka boleh berulang (lihat Kejadian a)
$n = 48$ $N = 625$
$$P(C) = \frac{n}{N} = \frac{48}{625}$$

2.2. Permutasi

Permutasi sejumlah obyek adalah penyusunan obyek tersebut dalam suatu urutan tertentu**.**

Dalam permutasi urutan diperhatikan!

Misal :
Dari huruf A, B, C $\rightarrow$ permutasi yang mungkin adalah: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB dan CBA. Perhatikan ke-enam susunan ini semua dianggap berbeda!

Dalil 1 Permutasi : Banyaknya Permutasi n benda yang berbeda adalah n!

Konsep Bilangan Faktorial
$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times 2 \times 1$
$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 2 \times 1 = 2$
$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$, dst
$100! = 100 \times 99!$
$100! = 100 \times 99 \times 98!$, dst

Contoh 3 :
Berapa cara menyusun bola lampu merah, biru, kuning dan hijau ?
Terdapat 4 objek berbeda : merah, kuning, biru dan hijau $\rightarrow$ $4! = 4\times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Dalil 2 Permutasi : Banyaknya permutasi r benda dari n benda yang berbeda adalah : $_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

Perhatikan dalam contoh-contoh ini urutan obyek sangat diperhatikan!

Contoh 4 :

Dari 40 nomor rekening akan diundi 3 untuk memenangkan hadiah. Undian urutan pertama akan memperoleh uang tunai $50000, undian urutan kedua memperoleh paket wisata dan undian urutan ketiga memperoleh sebuah sedan. Berapa banyaknya susunan pemenang yang mungkin terbentuk jika satu nomor rekening hanya berhak atas satu hadiah?

$$_{40}P_3 = \frac{40!}{(40-3)!} = \frac{40!}{37!} = \frac{40 \times 39 \times 38 \times 37!}{37!} = 59280$$

Dalil 3 Permutasi (Permutasi Melingkar): Banyaknya permutasi n benda yang disusun dalam suatu **lingkaran** adalah (n-1)!

Contoh 5:

Enam orang bermain bridge dalam susunan melingkar. Berapa susunan yang mungkin dibentuk? n = 6 maka permutasi melingkar = (6-1)! = 5! = 5 × 4 × 3 × 2 ×1 = 120

Sampai dalil ke-3, kita telah membahas permutasi untuk benda-benda yang berbeda. Perhatikan permutasi ABC, terdapat 3 objek yang jelas berbeda.

Bagaimana jika kita harus berhadapan dengan $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ dan $A_1=A_2=A$ dan $B_1=B_2=B$ dan $C_1=C_2=C$?

Dalil 4 Permutasi (Permutasi Bersekat)

Banyaknya permutasi untuk sejumlah n benda

di mana	jenis/kelompok	pertama	berjumlah n_1
	jenis/kelompok	kedua	berjumlah n_2
	:		:
	:		:
	jenis/kelompok	ke-k	berjumlah n_k

adalah : $$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!}$$

$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

Contoh 6 :
Berapa permutasi dari kata STATISTIKA? S = 2; T = 3; A = 2; I = 2; K = 1

Permutasi = $\frac{10!}{2!3!2!2!1!} = 75600$

Contoh 7 :
Dari 7 orang mahasiswa akan dilakukan pemisahan kelas. 3 orang masuk ke kelas pertama, 2 orang masuk ke kelas kedua dan 2 orang masuk ke kelas ketiga.

Ada berapa cara pemisahan? $\frac{7!}{3!2!2!} = 210$

2.3 Kombinasi

Kombinasi r obyek yang dipilih dari n obyek adalah susunan r obyek <u>tanpa memperhatikan urutan.</u>

Misalkan : Kombinasi 2 dari 3 obyek A, B dan C adalah

1. A dan B = B dan A
2. A dan C = C dan A
3. B dan C = C dan B

Dalil-1 Kombinasi

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

maka : Pemilihan 2 dari 3 obyek adalah : $C_2^3 = \frac{3!}{2!1!} = 3$

2.4 Kaidah Perkalian & Kombinasi

Dalam banyak soal, kaidah perkalian dan kombinasi seringkali digunakan bersama-sama.

Contoh 8 :
Manajer SDM mengajukan 12 calon manajer yang berkualifikasi sama, 5 calon berasal dari Kantor Pusat, 4 calon dari Kantor cabang dan 3 dari Program Pelatihan Manajer.

a. Berapa cara Manajer SDM dapat memilih 6 manajer baru dengan ketentuan 3 berasal dari Kantor Pusat. 2 dari Kantor Cabang dan 1 dari Program Pelatihan manajer?

Pemilihan 3 dari 5 calon dari Kantor Pusat = $C_3^5 = \frac{5!}{3!2!} = 10$

Pemilihan 2 dari 4 calon dari Kantor Cabang = $C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = 6$

Pemilihan 1 dari 3 calon dari Program Pelatihan = $C_1^3 = \frac{3!}{1!2!} = 3$

Pemilihan Manajer = $10 \times 6 \times 3$ = 180 cara = n

b. Berapa cara memilih 6 dari 12 calon manager?

Pemilihan 6 dari 12 calon manager = $C_{12}^6 = \frac{12!}{6!6!}$ = 924 = N

c. Berapa peluang 6 manajer baru dari 12 calon terdiri dari 3 dari Kantor Pusat, 2 dari Kantor Cabang dan 1 dari Program Pelatihan?

P(manajer) = $\frac{n}{N} = \frac{180}{924}$

3. Pengolahan Peluang

3.1 Kaidah Penjumlahan Peluang Kejadian

Dalil 1. Kaidah Penjumlah Peluang Kejadian Bila A dan B adalah dua kejadian sembarang, maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ atau $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$A \cup B$ = kejadian A **atau** B $A \cap B$ = kejadian A **dan** B

Contoh 10 :

Menurut catatan sebuah Bank, peluang Industri Manufakturing memperoleh kredit adalah 0.35. Sedangkan peluang Industri yang Padat Karya = 0.45. Peluang Industri yang tergolong Manufakturing atau Padat Karya = 0.25. Berapakah Peluang Industri Manufakturing dan Padat Karya memperoleh Kredit? (0.35 + 0.45 - 0.25 = 0.55)

Konsekuensi 1. Kaidah Penjumlahan Peluang

Bila A dan B adalah kejadian Saling Terpisah ($A \cap B = \emptyset$), maka :$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Contoh 11 :
Berapakah peluang munculnya kartu bernilai 7 berwarna merah (A) atau bernilai 7 dengan hitam(B) pada pengambilan sebuah kartu secara acak dari seperangkat kartu bridge?

Pada pengambilan sebuah kartu tidaklah mungkin mendapatkan kartu bernilai 7 berwarna merah sekaligus berwarna hitam ($A \cap B = \emptyset$)

$$P(A \cup B) = 2/52 + 2/52 = 4/52 = 1/13$$

Konsekuensi 2. Kaidah Penjumlahan Peluang

Bila $A_1, A_2, \ldots, A_k$ saling terpisah, maka :
$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)$

Dalil 2. Kaidah Penjumlahan Peluang Kejadian Berkomplemen

Jika A dan A' adalah 2 kejadian yang berkomplemen, maka :

$$P(A) + P(A') = 1$$

Contoh 12 :
Peluang seorang mahasiswa tidak lulus ujian = 0.30, Peluang seorang mahasiswa lulus ujian = 1 - 0.30 = 0.70
karena:
Jika kejadian A = TIDAK lulus ujian dan P(A) = 0.30
maka kejadian A’ = LULUS sehingga P(A) = 1 - P(A) = 1 - 0.30 = 0.70

3.2 Peluang Bersyarat

Peluang Bersyarat berlaku untuk penetapan peluang kejadian yang tidak bebas.
Kejadian-kejadian yang bergantung dengan kejadian lain disebut : ***Kejadian Tidak Bebas***.

Contoh kejadian tidak bebas : pengambilan contoh tanpa pemulihan
Tanpa pemulihan = contoh yang telah terambil tidak dikembalikan ke dalam ruang contoh.

Kejadian yang terjadi tanpa bergantung dengan kejadian lain disebut Kejadian ***Bebas***.
Contoh kejadian bebas : pengambilan contoh dengan pemulihan
Dengan pemulihan = contoh yang telah terambil dikembalikan ke dalam ruang contoh.

Notasi Peluang Bersyarat : P(B|A)
Dibaca : "Peluang terjadinya B, bila A telah terjadi"
atau
"Peluang B, jika peluang A diketahui"

Contoh 12:
Terdapat 10 bola terdiri dari 4 bola merah dan 6 bola hitam. Pengambilan sebuah bola dilakukan tanpa pemulihan
Peluang Bola pertama berwarna Merah= P(MERAH) = $4/10$
Peluang Bola kedua berwarna Hitam = P (HITAM | MERAH) = $6/9$
Peluang Bola ketiga berwarna Hitam = P (HITAM | HITAM | MERAH) = $5/8$
Peluang Bola keempat berwarna Merah = P(MERAH | HITAM | HITAM | MERAH) = $3/7$

Definisi Peluang Bersyarat secara umum :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A) \neq 0$$

Perhatikan : $P(B|A) \neq P(A|B)$ dan $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

Contoh 13 : Peluang KRL berangkat tepat waktuP(B) = 0.50
Peluang KRL datang ke tepat waktu P(D) = 0.40
Peluang KRL berangkat dan datang tepat waktu $P(B \cap D) = 0.30$

a. Peluang KRL akan datang tepat waktu setelah berangkat tepat waktu?

$$P(D|B) = \frac{P(B \cap D)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$$

b. Peluang KRL akan berangkat tepat waktu setelah datang tepat waktu?

$$P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$$

Definisi : Dua Kejadian A dan B dikatakan ***<u>bebas</u>*** jika :
P(B|A) = P(B) atau P(A|B) = P(A)
Bila hal itu ***<u>tidak dipenuhi,</u>*** A dan B dikatakan ***<u>tidak bebas</u>***

3.3 Kaidah Penggandaan Peluang = Kaidah perkalian peluang

Penghitungan peluang beberapa kejadian yang dapat terjadi sekaligus.

Dalil 1. Kaidah perkalian Peluang
Bila dalam suatu percobaan kejadian A dan B dapat terjadi **sekaligus**, maka :
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B\|A)$ $= P(B \cap A)$ $= P(B) \times P(A \| B)$

Ingat : $A \cap B$ dibaca sebagai kejadian A **dan** B

Contoh 14 (Lihat Contoh 12)

Terdapat 10 bola terdiri dari 4 bola merah dan 6 bola hitam. Pengambilan sebuah bola dilakukan tanpa pemulihan

a) Peluang Bola pertama berwarna Merah= P(MERAH) = $^{4}/_{10}$

Peluang Bola kedua berwarna Hitam = P (HITAM $|$ MERAH) = $6/9$

Peluang Bola pertama Merah dan Bola kedua Hitam = $4/10 \times 6/9 = 24/90 = 4/15$

b) Peluang Bola pertama berwarna Hitam = P(HITAM) = $6/10$

Peluang Bola kedua berwarna Merah = P(MERAH $|$ HITAM) = $4/9$

Peluang Bola pertama Hitam dan Bola kedua Merah = $6/10 \times 4/9 = 24/90 = 4/15$

> Dalil 2. Kaidah Perkalian Peluang Kejadian Bebas
>
> Bila A dan B adalah kejadian bebas, maka :
>
> $$P(A \cap B) = P(A) \times (B)$$

Contoh 14b:

Terdapat 10 bola terdiri dari 4 bola merah dan 6 bola hitam. Pengambilan sebuah bola dilakukan dengan pemulihan

Peluang Bola pertama berwarna Merah= P(MERAH) = $4/10$

Peluang Bola kedua berwarna Hitam = P (HITAM $|$ MERAH) = P(HITAM) $6/10$

Peluang Bola pertama Merah dan Bola kedua Hitam = $4/10 \times 6/10 = 24/100 = 6/25$

Kaidah Penggandaan Peluang (secara umum)

> Dalil 3. Kaidah Penggandaan Peluang (secara umum)
>
> Bila dalam suatu percobaan kejadian $A_1, A_2, ..., A_k$, maka :
>
> $$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k) = P(A\ ) \times P(A_2 | A_1) \times P(A_3 | A_1 | A_2) \times \ldots \times P(A_k | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{k-1})$$

☺ Selesai ☺