2 RUANG VEKTOR

2.1. FIELD

Pandang K suatu himpunan, didefinisikan 2 operasi yang disebut penjumlahan (+) dan perkalian (.). K merupakan *field* apabila terpenuhi aksioma :

(A1) Untuk setiap α, $\beta \in$ K maka $\alpha + \beta \in$ K dan $\alpha\ \beta \in$ k. Dikatakan K tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

(A2) Untuk setiap α, β, $\gamma \in$ K, maka $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

(A3) Terdapat $0 \in$ K, disebut elemen nol, sedemikian sehingga $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$, untuk setiap $\alpha \in$ K.

(A4) Untuk masing-masing $\alpha \in$ K, terdapat $-\alpha \in$ K, disebut negatif dari α, sedemikian sehingga $(-\alpha) + \alpha = \alpha + (-\alpha) = 0$.

(A5) Untuk setiap α, $\beta \in$ K maka $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

(A6) Untuk setiap α, β, $\gamma \in$ K maka $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

(A7) Untuk setiap α, β, $\gamma \in$ K maka :
(i) $\alpha(\beta + \gamma) + \alpha\beta + \alpha\gamma$
(ii) $(\beta + \gamma)\alpha + \beta\alpha + \gamma\alpha$.

(A8) Untuk setiap α, $\beta \in$ K maka $\alpha\beta = \beta\alpha$.

(A9) Terdapat $1 \in$ K, disebut elemen satuan dari K, sedemikian sehingga $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$, untuk setiap $\alpha \in$ K.

(A10) Untuk masing-masing $\alpha \neq 0 \in$ K, terdapat α^{-1}, disebut *invers* (kebalikan dari α, sedemikian sehingga $\alpha^{-1}\alpha = \alpha\alpha^{-1} = 1$.

Anggota-anggota (elemen-elemen) dari suatu field disebut *Skalar*.

Contoh (2.1):

Himpunan bilangan *riil* (bilangan nyata) R merupakan field terhadap operasi penjumlahan dan perkalian hitung biasa. Mudah ditunjukkan bahwa ke-10 aksioma di atas terpenuhi.

Contoh (2.2):

Himpunan bilangan kompleks C, yaitu himpunan berbentuk x + yi dengan x dan y riil serta $i = \sqrt{-1}$, merupakan field terhadap operasi penjumlahan dan perkalian hitung biasa. Kita tunjukkan sebagai berikut :

(A1), (A2), (A5), (A8) mudah ditunjukkan terpenuhi.

(A3) Elemen 0 dari C adalah = 0 = 0 + 0i.

(A4) Bila α = x + yi maka -α = -x -yi.

(A6) Misalkan α + x + yi, β = x' + y'i, γ = x" + y"i maka:

$\alpha\beta$ = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i dan

$(\alpha\beta)\gamma$ = (xx'x" - xy'y" - x'uu" - x"yy") + (xx'y" + xx"y' + x'x"y - yy'y")i Sedangkan :

$\beta\gamma$ = (x'x" - y'y") + (x'y" + x"y"i) dan

$\alpha(\beta\gamma)$ = (xx'x" - xy'y" - xuyy" - x"yy') + (xx'y" + xx"y' + x'x"y - yy'y")i.

Ternyata $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

(A7) $\alpha(\beta + \gamma)$ = (x + yi) {x' + x" + (y' + y")i}

= xx' + xx" - yy' yy" + (xy' + xy" + x'y + x"y)i

= (xx' - yy') + (xy'x'y)i + (xx" - yy") + (xy" = x"y)i

= $\alpha\beta + \alpha\gamma$

Secara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$

(A9) Elemen satuan dari C adalah 1 = 1 + 0i.

(A10) Misalkan $\alpha \neq 0$ dengan α = x + yi; tidak semua x,y nol. Sebut α^{-1} = u + vi, maka (u + vi)(x + yi) = 1 $\rightarrow$ (xu + yv) + (xv + yu)1 = 1 + 0i, diperoleh:

$$\begin{array}{ll} xu - yv = 1 \rightarrow & xyu - y^2v = y \\ yu + xv = 0 \rightarrow & xyu + x^2v = 0 \\ \hline & -(x^2 + y^2)v = y \rightarrow v = \dfrac{-y}{x^2 + y^2} \end{array} -$$

dan bila dihitung selanjutnya, maka $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

Jadi $\alpha^{-1} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{y}{x^2 + y^2} i$

2.2. RUANG VEKTOR DI ATAS SUATU FIELD

Pandang suatu himpunan V dan suatu field K. Kita definisikan operasi *"penjumlahan"* terhadap elemen-elemen V dan perkalian elemen-elemen V dengan elemen K (disebut *perkalian skalar*). Maka V disebut ruang vektor di atas field K bila terpenuhi :

(B1) Untuk setiap u, v $\in$ V dan $\alpha \in$ K maka u + v $\in$ V (tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar).

(B2) Untuk setiap u, v, w $\in$ V maka (u + v) + w = u + (v + w)y

(B3) Untuk setiap u, v $\in$ V dan $\alpha \in$ K maka α(u + v) = αu + αv.

(B4) Terdapat 0 $\in$ V, disebut vektor nol, sedemikian sehingga untuk setiap u $\in$ V berlaku 0 + u = u + 0 = u.

(B5) Untuk masing-masing u $\in$ V, terdapat -u $\in$ V, sedemikian sehingga (-u) + u = u + (-u) = 0.

(B6) Untuk setiap u, v $\in$ V maka u + v = v + u.

(B7) Untuk setiap u $\in$ V dan α, $\beta \in$ K berlaku (α + β)u = αu + βu, dan

(B8) ($\alpha\beta$)u = α(βu).

(B9) Untuk setiap u $\in$ V berlaku 1u = u, dimana 1 adalah elemen satuan dari K.

Anggota-anggota dari suatu ruang vektor disebut *Vektor*.

Catatan (1):

Perkataan vektor di atas bersifat umum. Jadi bukan semata-mata vektor ilmu ukur seperti yang kita bicarakan pada Bab 1. Jelasnya : Setiap himpunan (apa pun) yang memenuhi semua aksioma ruang vektor di atas, disebut *ruang vektor* dan anggota-anggotanya disebut *vektor*.

Catatan (2):

Himpunan R^n, yaitu himpunan dari n *tupel* berurutan bilangan riil, merupakan penyajian vektor-vektor dengan banyak komponen n buah. Mudah ditunjukkan bahwa R^n memenuhi semua aksioma ruang vektor (lihat juga Bab 1, pasal 1.4) terhadap penjumlahan dan perkalian skalar. Di dalam buku ini, pembahasan lebih ditekankan kepada vektor ilmu ukur dan R^n.

Contoh (2.3):

V adalah himpunan semua polinom berderajat ≤ 2. Didefinisikan operasi penjumlahan; bila $p_1(t) = a_{01} + a_{11}t + a_{21}t^2$ dan $p_2(t) = a_{02} + a_{12}t + a_{22}t^2$ maka $(p_1 + p_2)(t) = (a_{01} + a_{02}) + (a_{11} + a_{12})t + (a_{21} + a_{22})t^2$, serta perkalian skalar: $(\alpha p_1)(t) = \alpha a_{01} + \alpha a_{11}t + \alpha a_{21}t^2$, semua sifat ruang vektor terpenuhi. Jadi, V merupakan ruang vektor.

Contoh (2.4):

Himpunan $A = \{(x,y) | x \in R,\ y \in R\}$. Tetapi kita definisikan operasi penjumlahan sebagai: $(a,b) + (c,d) = (a,b)$, dan operasikan perkalian skalar: $\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$. Terhadap operasi-operasi di atas, A bukan ruang vektor, karena tidak semua aksioma terpenuhi. Untuk itu, cukup kita berikan satu contoh penyangkalan. Misalnya ambil $u = (a,b)$ dan $v = (c,d)$ maka $u + v = (a,b) \neq v + u = (c,d)$, yang mana (B6) tidak terpenuhi.

2.3. RUANG VEKTOR BAGIAN (SUBSPACE)

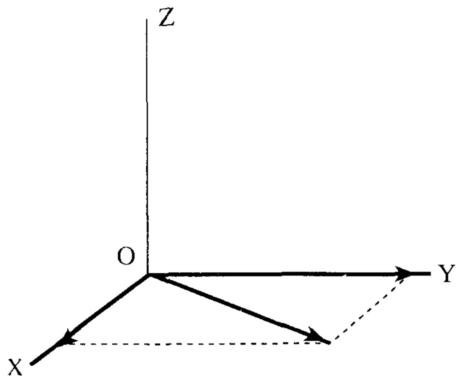
Pandang V suatu ruang vektor. W himpunan bagian dari V, W (misalnya dengan suatu sifat khusus) memenuhi semua aksioma ruang vektor, sehingga merupakan ruang vektor tersendiri, maka W kita sebut ruang vektor bagian (*subspace*) dari V.

Kadang-kadang kita menghilangkan kata "bagian", dan menyebut "ruang vektor di V", atau pula "ruang bagian dari V".

Contoh (2.5):

Pandang R^3 dengan susunan koordinan Cartesian di mana X, Y, Z adalah sumbu-sumbu koordinatnya. Himpunan vektor-vektor pada bidang XOY merupakan ruang vektor bagian dari R^3. Dapat mudah dipahami bahwa komponen ketiga dari setiap vektor pada XOY adalah = 0. Atau; $XOY = \{(x,y,0) | x \in R,\ y \in R\}$

Contoh anggota XOY adalah $\boldsymbol{a} = [1,1,0]$, $\boldsymbol{b} = [0,1,0]$, $\boldsymbol{c} = [2,3,0]$, $0 = [0,0,0]$, dan lain-lain. Jelas bahwa tidak semua vektor $\in R^3$ merupakan anggota X0Y. Kemudian mudah ditunjukkan bahwa X0Y memenuhi semua aksioma ruang vektor.



Gambar 26

Untuk menentukan apakah W merupakan ruang bagian, cukup diperıksa berikut :

(C1) $W \neq \phi$ (W tidak hampa), untuk itu kita tunjukkan bahwa vektor $0 \in W$.

(C2) Untuk setiap a, $b \in W$ maka $A + B \in W$.

(C3) Untuk setiap $a \in W$ dan $\alpha \in K$ (skalar) maka $\alpha a \in W$. Maka W adalah ruang vektor bagian dari V.

Ketiga syarat (C1) , (C2) dan (C3) itu cukup. Karena bila $W \subset V$, aksioma ruang vektor kecuali (B1), (B4) dan (B5) terpenuhi. Syarat (C2) dan (C3) dapat menggantikan (B1). Sedang (C1) yaitu W tidak hampa, berarti terdapat $u \in W$ dan karena (C3) terpenuhi $0u = 0 \in W$, $(-1)u = -(1u) = -u \in W$. Berarti (B4) dan (B5) terpenuhi.

Contoh (2.6):

Dengan menggunakan syarat (C1), (C2) dan (C3) akan kita tunjukkan bahwa X0Y pada Contoh (2.5) merupakan ruang vektor bagian dari R^3, sebagai berikut :

(C1) $X0Y \neq \Phi$ karena $[0,0,0] \in X0Y$.

(C2) Misalkan $\boldsymbol{a} = [a_1,a_2,0] \in X0Y$, $\boldsymbol{b} = [b_1,b_2,0] \in X0Y$ maka $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, 0]$ juga $\in$ X0Y (karena komponen ketiga dari $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ adalah $= 0$.

(Di sini a_1, b_1, b_2 adalah sebarang).

(C3) Untuk sebarang skalar α dan $\boldsymbol{a} = \{a_1,a_2,0\} \in$ X0Y maka $\alpha\boldsymbol{a} = [\alpha a_1, \alpha a_2,0]$ juga $\in$ X0Y.

Jadi terbukti X0Y ruang vektor bagian dari R3.

2.4. VEKTOR YANG BEBAS LINIER DAN BERGANTUNG LINIER

DEFINISI:

Himpunan m buah vektor $\{u_1,u_2, ..., u_m\}$ disebut bergantung *linier* (linearly dependent, tidak bebas linier) bila terdapat skalar-skalar $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ yang tidak semua nol sedemikian sehingga $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_m u_m = 0$ ... (*). (0 = vektor nol).

Di dalam hal lain himpunan $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ disebut *bebas linier (linearly independent),* dengan perkataan lain apabila $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_m u_m = 0$ hanya terpenuhi oleh $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda m = 0$.

Catatan (3):

Kalau m = 1, artinya himpunan hanya mempunyai 1 anggota, yaitu u maka:

(*) Bila u = $\boldsymbol{0}$ (vektor nol), akan bergantung linier, karena $\lambda u = 0 \rightarrow \lambda 0 = 0$, terpenuhi pula untuk $\lambda \neq 0$.

(**) Bila u $\neq \boldsymbol{0}$, akan bebas linier karena $\lambda_u = 0$ hanya terpenuhi oleh $\lambda = 0$.

Catatan (4) :

Kalau dalam himpunan terdapat vektor 0, misalnya $\{u_1,u_2,...,0,...,u_m\}$ maka himpunan itu bergantung linier. $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_i 0 + ... + \lambda_m u_m = 0$, jelas harga $\lambda_i \neq 0$ juga memenuhi.

Contoh (2.7):

Pandang ruang vektor R^3 dengan $\boldsymbol{a}$ = [3,1,2], b = [1,2,1], c = [2,-1,1] $\in R^3$. Ke-3 vektor tersebut adalah bergantung linier karena :
$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0 \rightarrow \lambda_1[3,1,2] + \lambda_2[1,2,1] + \lambda_3[2,-1,1] = [0,0,0]$, ada λ yang $\neq 0$, yaitu misalnya $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ memenuhi.

Contoh (2.8):

[2,3] dan [1,3] adalah bebas linier karena: $\lambda_1[2,3] + \lambda_2[1,3] = [0,0]$ atau:

$$2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$$

diperoleh hanya $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Catatan (5):

Biasanya kita menyingkat saja ketika mengatakan "himpunan vektor-vektor $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ bebas/bergantung linier" menjadi "vektor-vektor $u_1,u_2,...,u_m$ bebas/bergantung linier".

Catatan (6):

Bila u dan v dua vektor yang berkelipatan, $u = \alpha v$, maka mereka bergantung linier. Sebab $u = \alpha v \rightarrow 1u - \alpha v = 0$, artinya terdapat $\lambda \neq 0$ pada $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0$.

Pada R^n, 2 vektor yang berkelipatan dapat kita lihat dari komponen-komponen (seletak) yang berkelipatan sama.

Teorema (1):

Jika sebagian (himpunan bagian) dari m vektor-vektor $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ bergantung linier, maka keseluruhan m vektor-vektor tersebut adalah bergantung linier.

Bukti:

Misalkan p vektor, p < m, bergantung linier, katakanlah $u_1, u_2, ..., u_p$ maka terdapat skalar-skalar $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ yang tidak semua sedemikian sehingga: $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_p u_p = 0$ (*). Kita ambil kemudian $\lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = ... = \lambda_m = 0$.

(*) menjadi: $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_p u_p + \lambda_{p+1} u_{p+1} + ... + \lambda_m u_m = 0$, dimana terdapat $\lambda_1 \neq 0$ (λ_1 antara $\lambda_1\lambda_2,...,\lambda_p$). Jadi, m vektor tersebut bergantung linier.

Contoh (2.9):

$\boldsymbol{a}$ = [2,3,1,4], $\boldsymbol{b}$ = [6,9,3,12], $\boldsymbol{c}$ = [2,0,3,1], $\boldsymbol{d}$ = [0,0,1,4]. Maka karena $\boldsymbol{a}$ dan b berkelipatan mereka bergantung linier. Berdasarkan Teorema (1) di atas maka $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ dan $\boldsymbol{d}$ bergantung linier.

Teorema (2):

Jika himpunan m vektor $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ bebas linier maka sebagian (himpunan bagian)-nya juga bebas linier.

Bukti:

Andaikata himpunan bagian tersebut bergantung linier, menurut teorema sebelumnya keseluruhan m vektor adalah bergantung linier. Suatu kontradiksi. Pengandaian kita di atas tidak benar. Jadi haruslah himpunan bagian tersebut bebas linier.

Contoh (2.10):

Dapat diselidiki bahwa $\boldsymbol{a}$ = [3,1,2], $\boldsymbol{b}$ = [2,1,1], $\boldsymbol{c}$ = [4,3,3] bebas linier. Maka mudah dilihat bahwa a dan b adalah bebas linier.

2.5. KOMBINASI LINIER

DEFINISI:

Suatu vektor v dikatakan kombinasi linier dari vektor-vektor $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ bila terdapat skalar-skalar $\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\}$ sedemikian sehingga $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n$

Contoh (2.11):

$\boldsymbol{a}$ = [2,1,2], $\boldsymbol{b}$ = [1,0,3], $\boldsymbol{c}$ = [3,1,5]. Kita hendak menyatakan/menuliskan $\boldsymbol{a}$ sebagai kombinasi linier dari $\boldsymbol{b}$ dan $\boldsymbol{c}$. Kita hitung λ_1 dan λ_2 yang memenuhi $[2,1,2] = \lambda_1[1,0,3] + \lambda_2[3,1,5]$ atau :

$$
\begin{aligned}
2 &= \lambda_1 + 3\lambda_2 && \text{.... (1)}\\
1 &= 0\lambda_1 + \lambda_2 && \text{.... (2)}\\
2 &= 3\lambda_1 + 5\lambda_2 && \text{.... (3)}
\end{aligned}
$$

Kita mempunyai 3 persamaan dengan 2 anu. Kita selesaikan dulu persamaan (1) dan (2), yang hasilnya $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = -1$. Kemudian nilai tersebut disubstitusikan ke (3) ternyata memenuhi pula. Jadi, penulisan yang diminta: $a = -b + c$.

Contoh (2.12):

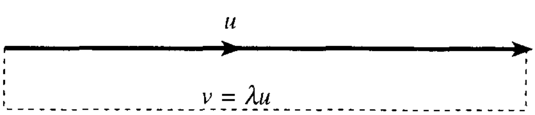
$\boldsymbol{p} = [2,1,3]$, $\boldsymbol{q} = [0,1,2]$ dan $\boldsymbol{r} = [2,2,4]$. Tulis $[2,1,3] = \lambda_1[0,1,2] + \lambda_2[2,2,4]$ atau :

$$
\begin{aligned}
2 &= 0\lambda_1 + 2\lambda_2 && \text{..... (1)}\\
1 &= \lambda_1 + 2\lambda_2 && \text{..... (2)}\\
3 &= 2\lambda_1 + 4\lambda_2 && \text{..... (3)}
\end{aligned}
$$

Persamaan (1) dan (2) diselesaikan, diperoleh $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = -1$, tetapi nilai-nilai tersebut tak memenuhi persamaan (3). Jadi, p bukan (tidak dapat dinyatakan/ditulis sebagai) kombinasi linier dari $\boldsymbol{q}$ dan $\boldsymbol{r}$.

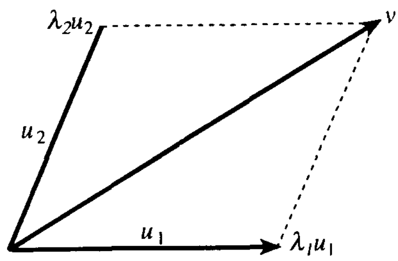
2.6. ARTI KOMBINASI LINIER SECARA ILMU UKUR

(1) Kalau $\boldsymbol{v}$ kombinasi linier dari suatu vektor $\boldsymbol{u}$, yaitu $\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{u}$, yang mana $\boldsymbol{v}$ adalah kelipatan dari $\boldsymbol{u}$ dengan garis pembawanya sama (atau sejajar), **v** dan $\boldsymbol{u}$ disebut *koliner* (segaris).



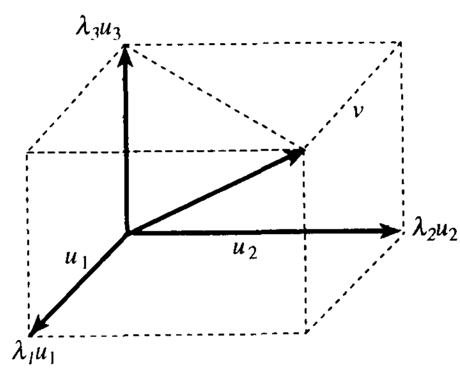
Gambar 27

(2) v kombinasi linier dari 2 vektor u_1 dan u_2 yaitu $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, maka v adalah diagonal jajaran genjang yang sisi-sisinya $\lambda_1 u_1$ dan $\lambda_2 u_2$. v, u_1 dan u_2 disebut koplanar (sebidang). Kalau u_1,u_2 segaris maka jelas v, u_1, u_2 adalah segaris pula.



Gambar 28

(3) v kombinasikan linier dari 3 vektor u_1,u_2,u_3 yang tidak sebidang, yaitu $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$, maka v adalah diagonal ruang parallepipedum yang sisi-sisinya $\lambda_1 u_1$, $\lambda_2 u_2$, $\lambda_3 u_3$. Untuk lebih dari 3 vektor kita tak dapat menggambarkan secara ilmu ukur.



Gambar 29

2.7. BEBERAPA TEOREMA MENGENAI KOMBINASI LINIER

Teorema (3):

Jika $m(m > 1)$ vektor $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ bergantung linier, maka paling sedikit terdapat satu vektor dapat ditulis sebagai linier dari vektor-vektor selebihnya.

Bukti :

Karena $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ bergantung linier, paling sedikit satu di antara skalar-skalar $\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\}$ tidak nol, misalnya λp, sedemikian sehingga $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_p u_p + ... + \lambda_m u_m = 0$. Kemudian $\lambda_p u_p$ kita pindah ruas, diperoleh $-\lambda_p u_p = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... \lambda_{p-1} U_{p-1} + \lambda_{p+1} u_{p+1} + ... + \lambda_m u_m$. Dan karena $\lambda_p \neq 0$ diperoleh:

$$u_p = -\frac{\lambda_1}{\lambda_p} u_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_p} u_2 - .... - \frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p} u_{p-1} - \frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p} u_{p+1}$$

$$- \frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_{p+1}} - ... - \frac{\lambda_m}{\lambda_p} u_m$$

$= \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + ... + \mu_{p-1} u_{p-1} + \mu_{p+1} u_{p+1} + ... + \mu_m u_m$. Jadi, u_p kombinasi linier dari vektor selebihnya.

Teorema (4)

Jika satu di antara m vektor $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ adalah kombinasi linier dari vektor selebihnya maka m vektor tersebut bergantung linier.

Bukti :

Misalnya u_p adalah kombinasi linier dair $\{u_1,u_2,..., u_{p-1},u_{p+1},...,u_m\}$ maka $u_p = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_{-1} u_{p-1} + \lambda_{+1} u_{p+1} + ... + \lambda_m u_m$. Bila u_p pindah ruas, diperoleh $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_{-1} u_{p-1} + \lambda_{+1} u_{p+1} + ... + \lambda_m u_m = 0$.

Jelas tidak semua koefisien λ_i nol, karena $\lambda_p = -1 \neq 0$. Jadi, m vektor tersebut bergantung linier.

Contoh (2.13):

Selidiki bahwa $\boldsymbol{a}$ = [2,1,], $\boldsymbol{b}$ = [0,1,0], dan $\boldsymbol{c}$ = [2,0,2] bergantung linier. Berdasarkan Teorema (4) kita selidiki apakah salah satu di antara $\boldsymbol{a,b,c}$ kombinasi linier vektor selebihnya. Misalnya $\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{b} + \lambda_2\boldsymbol{c}$ atau $[2,1,2] = \lambda_1[0,1,0] + \lambda_2[2,0,2]$, atau :

$$
\begin{aligned}
2 &= 0\lambda_1 + 2\lambda_2 \\
1 &= \lambda_1 + 0\lambda_2 \\
2 &= 0\lambda_1 + 2\lambda_2
\end{aligned}
$$

terpenuhi $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 1$. Berarti $\boldsymbol{a}$ kombinasi linier $\boldsymbol{b}$ dan $\boldsymbol{c}$. Sehingga $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ bergantung linier.

Catatan (7):

Harap diperhatikan bahwa Teorema (4) *tidak* mengatakan: Kalau salah satu di antara m vektor, *tidak dapat* dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor selebihnya maka m vektor tersebut bebas linier.

Teorema (5):

Jika m vektor-vektor $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ bebas linier dan (m + 1) vektor-vektor $\{u_1,u_2,...,u_m.v\}$ bergantung linier, maka v adalah kombinasi linier dari $\{u_1,u_2,...,u\}$.

Bukti:

Karena $\{u_1,u_2,...,u_m,v\}$ bergantung linier, pada persamaan $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_m u_m + \lambda_{m+1} v = 0$ terdapat $\lambda_i \neq 0$. Dalam hal ini haruslah $\lambda_{m+1} \neq 0$, karena bila tidak demikian, terjadi kontradiksi yaitu $\lambda_1 \neq 0$ adalah di antara i = 1,2,...,m, yang mana $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_m u_m + 0v = 0 \rightarrow \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_m u_m = 0$ berakibat $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ bergantung linier. Maka bila λ_{m+1} v pindah ruas, diperoleh :

$-\lambda_{m+1}\, v + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_m u_m$, dan karena $\lambda_{m+1} \neq 0$:

$$
v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}} u_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{m+1}} u_2 - ... - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} u_m
$$

$$
= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_m u_m.
$$

Akibat : Bila $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ bebas linier dan v bukan kombinasi linier dari $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ maka $\{u_1,u_2,...,u_m,v\}$ bebas linier. Akibat ini melengkapi Catatan (7) di atas.

Teorema (6):

Pandang S suatu himpunan bagian dari ruang vektor W. Misalkan S = $\{u_1,u_2,...,u_m\}$, maka himpunan semua kombinasi linier dari S, ditulis L(S) merupakan ruang vektor bagian dari W, sebab:

(1) L(S) ≠ # karena $0 = 0u_1 + 0u_2 + ... = 0u_m$ kombinasi linier dari S, berarti $0 \in L(S)$.

(2) Misalkan $v \in L(S)$, berarti $v + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_m u_m$
$w \in L(S)$, berarti $w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_m u_m$
$v + w = (\lambda_1 + \mu_1)u_1 + (\lambda_1 + \mu_2)u_2 + ... + (\lambda_m + u_m)u_m$ merupakan kombinasi linier dari S, berarti $v + w \in L(S)$.

(3) Bila α skalar maka $\alpha v = (\alpha\lambda_1)u_1 + (\alpha\lambda_2)u_2 + ... + (\alpha\lambda_m)u_m$ juga merupakan kombinasi linier dari S, berarti $\alpha \in L(S)$?

Ruang vektor L(S) disebut ruang vektor yang dibentuk (dibangun generated) oleh S. S disebut suatu sistem pembentuk atau sistem generator. Kita definisikan :

DEFINISI:

Suatu himpunan vektor-vektor $\{u_1,u_2,...,u_m]$ disebut sistem pembentuk dari ruang vektor V, ditulis $V = L\{u_1,u_2,...,u_m\}$ bila setiap vektor $v \in V$ dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari $\{u_1,u_2,...,u_m\}$.

Contoh (2.14):

Vektor-vektor ***a*** = [2,1,0], ***b*** = [3,2,1], ***c*** = [5,3,1] adalah pembentuk ruang vektor L{a,b,c}. Untuk menyelidiki apakah vektor ***d*** = [1,1,1] ∈ L, kita selidiki apakah ***d*** kombinasi linier dari {***a,b,c***}. Ternyata ***d*** = -***a*** + ***b*** + 0***c***, jadi d kombinasi dari {***a,b,c***} yang berarti ***d*** ∈ L.

***Teorema (7)*: (Teorema Pertukaran *Steinitz*)**

Apabila $S = \{u_1,u_2,...,u_p\}$ adalah sistem pembentuk ruang vektor L, dengan perkataan lain: L = L(S), kemudian $\{v_1,v_2,...,v_q\}$ $(q \leq p)$, kumpulan vektor-vektor yang bebas linier di dalam L, maka $\{v_1,v_2,...,v_q\}$ pembentuk L juga. Dengan perkataan lain: $L = L\{u_1,u_2,...,u_p\} = L\{v_1,v_2,...,v_q,u_{q+1},...,u_p\}$.

Bukti: (Dengan induksi lengkap).

(*) Untuk $q = 1$, harus dibuktikan $\{v_1,u_2,...,u_p\}$ sistem pembentuk L. Karena $v_1 \in L$ maka: $v_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + 2_p u_p$ dan karena v_1 bebas linier maka $v_1 \neq 0$, sehingga terdapat λ yang $\neq 0$, kalau perlu dengan pertukaran indeks, ambil $\lambda_1 \neq 0$. Berarti:

$$u_1 = \frac{1}{\lambda_1} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} u_1 - .... - \frac{\lambda_p}{\lambda_1} u_p.$$ Jadi u_1 kombinasi linier dari $\{v_1,u_2,...,u_p\}$

Setiap vektor lain $w \in L$ yang merupakan kombinasi linier dari $\{u_1,u_2,...,u_p\}$ jelas merupakan kombinasi linier dari $\{v_1,u_2,...,u_p\}$. Berarti $\{v_1,u_2,...,u_p\}$ sistem pembentuk dari L. Untuk $q = i$ benar.

(**) Misalkan teorema benar untuk k vektor-vektor v, di sini $k \leq q \leq p$. Ini berarti bahwa apabila dalam sistem pembentuk: $\{u_1,u_2,...,u_k,u_{k+1},...,u_p]$ vektor-vektor $u_1,u_2,...,u$ ditukar dengan vektor-vektor $v_1,v_2,...,v_k$ maka $\{v_1,v_2,...,v_k,v_{k+1},...., u_p\}$ juga merupakan sistem pembentuk. Karenanya vektor v_{k+1} kombinasi linier :

$$v_{k+1} = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_{k+1} v_k + \mu_{k+1} u_{k+1} + ... + \mu_p u_p.$$

Persamaan di atas tidak semua $\mu_{k+1}, 2_{k+2}, ..., \mu_p$ nol, karena bila demikian: $v_{k+1} = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + ... + \mu_k v_k$, berarti $\{v_1,v_2,...,v_k,v_{k+1}\}$ bergantung linier, suatu pertentangan bahwa $\{v_1, v_2,...,v_k,v_{k+1},...v_q\}$bebas linier (lihat juga Teorema 2). Maka, kalau perlu dengan pertukaran indeks, ambil $\mu_{k+1} \neq 0$, sehingga :

$$U_{k+1} = -\frac{\mu_1}{\mu_{k+1}} v_1 - \frac{\mu_2}{\mu_{k+1}} v_2 - ... - \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}} v_k + \frac{1}{\mu_{k+1}} v_{k+1} - \frac{\mu_p}{\mu_{k+1}} u_p$$

Jadi u_{k+1} kombinasi linier dari $\{v_1,v_2,...,v_k v_{k+1},....,u_p\}$, dan setiap vektor lain $w \in L$ yang merupakan kombinasi linier dari $\{v_1,v_2,...,v_k,u_{k+1},...,u_p\}$ jelas merupakan kombinasi linier dari $\{v_1,v_2,...,v_k,v_{k+1},...,u_p\}$. Sehingga $\{v_1,v_2,...,v_k,v_{k+1},...,u_p\}$ merupakan sistem pembentuk. Hal ini menunjukkan bila benar untuk k, benar pula untuk k + 1. Dapat dicatat bahwa banyaknya vektor-vektor v harus kurang atau sama dengan banyaknya vektor-vektor v harus kurang atau sama dengan banyaknya vektor-vektor u, atau $q \leq p$. Sebab apabila tidak demikian setelah p vektor-vektor ditukar semua dengan p vektor-vektor $\{v_1,v_2,...,v_p\}$, sudah merupakan sistem pembentuk, berarti v_{p+1} merupakan kombinasi liniernya. Hal ini bertentangan dengan ketentuan bahwa vektor-vektor v_i adalah bebas linier.

2.8. DIMENSI DAN BASIS

DEFINISI:

Suatu ruang vektor V dikatakan berdimensi n bila dapat diketemukan suatu himpunan n vektor-vektor $\in$ V yang bebas linier, sedangkan setiap himpunan (n + 1) vektor-vektor $\in$ V *selalu* bergantung linier, dengan perkataan lain, banyaknya maksimum vektor-vektor $\in$ V yang bebas linier adalah n.

Hubungan antara sistem pembentuk dan dimensi ruang vektor dinyatakan oleh :

•

Teorema (8):

Setiap n vektor-vektor $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ yang bebas linier dari V, ruang vektor berdimensi n, pasti merupakan sistem pembentuk dari V.

•

Bukti:

Ambil vektor sebarang $v \in V$. Karena dimensi V adalah n, menurut definisi $\{u_1,u_2,...u_n\}$ bergantung linier. Sehingga pada persamaan $\lambda_1u_1 + \lambda_2u_2 + ... + \lambda_nu_n + \lambda_{n+1}v = 0$ terdapat λ_i yang tidak nol, dan haruslah $\lambda_{n+1} \neq 0$ karena bila tidak demikian, persamaan $\lambda_1u_1 + \lambda_2u_2 + ... + \lambda_nu_n + 0v = 0$, berakibat $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ bergantung linier. Bertentangan. Berarti :

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}u_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{n+1}}u_2 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}u_n$$

$$= \mu_1u_1 + \mu_2u_2 + ... + \mu_nu_n.$$

Jadi, setiap $v \in V$ kombinasi linier dari $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ berarti $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ sistem pembentuk.

Catatan(8):

Suatu sistem pembentuk tidak perlu bebas linier. Mudah diterangkan bahwa bila $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ merupakan sistem pembentuk yang bergantung linier, sedang maksimum vektor-vektor di antara u_1, u_2, ..., u_m yang bebas linier adalah $\{u_1,u_2,...,u_p\}$ (boleh dengan pertukaran indeks), maka $\{u_1,u_2,...,u_p\}$ juga sistem pembentuk. Jadi, dalam hal ini dimensi adalah p.

DEFINISI :

Setiap sistem pembentuk yang bebas linier disebut basis dari ruang vektor tersebut.

Atau :
Setiap himpunan n vektor-vektor yang bebas linier $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ dari ruang vektor berdimensi n, disebut basis dari ruang vektor.

Catatan (9) :

Karena vektor-vektor $\in$ V tak berhingga banyaknya, kecuali ruang vektor yang dibentuk oleh vektor nol sendiri, yaitu L{0}, dan misalnya dimensi V berhingga = n, maka kita dapat mencari banyak sekali himpunan n vektor-vektor $\in$ V yang bebas linier. Sehingga kita dapat memilih banyak basis untuk V.

Contoh (2.15):

Misalkan S = {***a*** = [1,1,1], ***b*** = [2,1,1], ***c*** = [3,2,2]}.

S membentuk ruang vektor L(S) = L{a,b,c}.

S = {***a,b,c***} adalah sistem pembentuk dari L.

Kita selidiki bahwa ***c = a + b,*** jasi {***a,b,c***} bergantung linier. Kemudian {***a,b***} bebas linier karena tidak berkelipatan.

Jadi, {***a,b***} adalah sistem pembentuk yang bebas linier berarti basis dari L. Maka dimensi L adalah = 2. Seperti diterangkan pada Catatan (9) di atas, kita boleh memilih basis L yang lain, yaitu himpunan 2 vektor $\in$ L yang bebas linier. Contohnya: {***a,c***} atau {***b,c***} ataupun yang lain dari ***a, b*** atau ***c***.

Misalnya : $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 0\boldsymbol{c} = \{3,2,2] \in L$

$\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c} = \{11,6,6] \in L$

{d,e} bebas linier, jadi juga basis L.

Catatan (10):

L{0}, ruang vektor yang dibentuk oleh vektor nol, hanya beranggotakan vektor nol saja. 0 bergantung linier, jadi vektor yang bebas linier $\in$ L {0} tidak ada, berarti dimensi L{0} = 0.

Catatan (11):

Dimensi dari ruang vektor R^n adalah n.

Hal ini karena kita dapat menemukan n vektor-vektor satuan: E = $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$, dimana

$$\boldsymbol{e}_1 = [1.0,...,0]$$
$$\boldsymbol{e}_2 = [0,1,...,0]$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{e}_n = [0,0,1]$$

Mudah ditunjukkan bahwa E bebas linier. Juga setiap vektor $\in R^n$ adalah kombinasi linier dari E. Jadi, E merupakan basis dari R^n, yang biasanya kita sebut basis alam (natural basis). Juga dari sini dapat dicatat bahwa setiap m vektor-vektor $\in R^n$, dengan m > n, adalah bergantung linier.

Contoh (2.16):

Vektor $\boldsymbol{a} = [1,-1,2,3] \in R^4$ dapat ditulis sebagai kombinasi linier basis E sebagai berikut :

$$\boldsymbol{a} = [1,-1,2,3] = 1[1,0,0,0] - 1[0,1,0,0] + 2[0,0,1,0] + 3[0,0,0,1]$$
$$= 1\boldsymbol{e}_1 - 1\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_4.$$

Catatan (12):

Kalau L ruang vektor bagian dari V maka dimensi L $\leq$ dimensi V. Kalau dimensi L = dimensi V, berarti L = V.

Catatan (13):

Setiap satu vektor $\neq 0 \in R^3$ merupakan sistem pembentuk ruang vektor bagian berdimensi 1. Jadi, kalau $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, maka $L\{\boldsymbol{e}\}$ adalah garis lurus dengan persamaan $x = \lambda\boldsymbol{a}$.

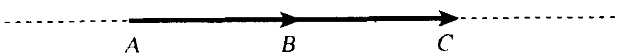
Gambar 30

Setiap dua vektor yang bebas linier (tidak berkelipatan/tidak segaris) akan membentuk ruang vektor bagian berdimensi 2, merupakan bidang rata $L\ \{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ yang persamaannya $x + \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$.

Contoh (2.17):

Kita periksa apakah titik-titik A(3,2,1), B(1,2,2), C(-1,3,2) segaris (kolinter). Untuk itu kita periksa apakah vektor AB dan AC berkelipatan.

$\boldsymbol{AB} = [-2,1,0]$ dan $\boldsymbol{AC} = [-4,2,0]$. Jelas $\boldsymbol{AC} = 2\boldsymbol{AB}$. Jadi A,B,C segaris.



Gambar 31

Teorema (9):

Apabila$\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ basis dari ruang vektor V berdimensi n, maka setiap vektor $v \in V$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi linier dari $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$, misalnya $v = \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \ldots + a_nu_n$ dan n-tupel skalar $[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]$ disebut koordinat v relatif terhadap basis $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$.

Bukti:

Jelas karena $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ basis maka v kombinasi linier darinya. Tinggal ditunjukkan ketunggalannya. Misalkan :

$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$ dan juga
$v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n$.

$0 = (\alpha_1 - \beta_1)u_1 + (\alpha_2 - \beta_2)u_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)u_n$ dan karena $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ bebas linier maka $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0$, berarti α_1, $\alpha_2 = \beta_2,\ldots,\alpha_n = \beta_n$.

2.9. SOAL-SOAL DAN PEMECAHANNYA

2.17. V adalah himpunan semua fungsi-fungsi riil dari satu variabel. Didefinisikan penjumlahan: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dan perkalian skalar $(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$, untuk setiap $f, g \in V$ serta x dan a skalar riil. Contoh untuk operasi ini:

Misalnya: $f(x) = 2x^2$
$g(x) = 6x + 2$ maka

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x^2 + 6x + 2$, dan $(5f)(x) = 10x^2$. Tunjukkan bahwa V suatu ruang vektor di atas field himpunan bilangan riil.

Penyelesaian:

Kita selidiki semua aksioma ruang vektor:

(B1) Jelas bahwa $f + g \in V$ dan $\alpha f \in V$.

(B2) Misalnya $f, g, h, \in V$ maka untuk setiap x riil:
$$((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x)$$
$$= f(x) + (g + h)(x) = (f + (g + h))(x)$$
Jadi $(f + g) + h = f + (g + h)$.

(B3) $$(\alpha(f + g))(x) = \alpha((f + g)(x)) = \alpha(f(x) + g(x))$$
$$= \alpha(f(x)) + \alpha(g(x)) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x)$$
$$= (\alpha f + \alpha g)(x)$$
Jadi $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$.

(B4) Fungsi nol : $0(x) = 0$. Untuk setiap x, merupakan elemen nol dari V.

(B5) Bila $f \in V$ maka fungsi $-f$ merupakan negatif dari f.

(B6) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$
$= (g + f)(x)$, berarti $f + g = g + f$, untuk setiap $f, g \in V$

(B7) $((\alpha + \beta)f(x)) = (\alpha + \beta)(f(x) = \alpha(f(x)) + \beta(f(x))$
$= (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) = (\alpha f + \beta f)(x)$
Jadi $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$, untuk setiap $f \in V$ dan α, β skalar riil.

(B8) $((\alpha\beta)f(x) = (\alpha\beta)f(x) = \alpha(\beta(f(x))) = \alpha((\beta f)(x))$
$= (\alpha(\beta f))(x)$.
Jadi $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$, untuk setiap $f \in V$ dan α, β skalar riil.

(B9) $(1f)(x) = 1(f(x)) = f(x)$. Jadi $1f = f$, untuk setiap $f \in V$.

Jadi V adalah ruang vektor di atas *field* himpunan bilangan riil R.

2.18. Diketahui $V = \{(x,y) \mid x \in R, y \in R\}$. Tunjukkan bahwa V bukan ruang vektor atas *field* R, himpunan bilangan riil, terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar sebagai berikut:

(i) $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$ dan $\alpha(a,b) = (\alpha a,b)$.

(ii) $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$ dan $\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$

Catatan : α : harga mutlak dari α.

Penyelesaian:

(i) Kita cari suatu contoh penyangkalan terhadap aksioma ruang vektor, (B7) tidak terpenuhi, misalnya, jika kita ambil $\alpha = 1$, $\beta = 2$, dan $u = (4,3)$ maka:

$(\alpha + \beta)u = (1 + 2)(4,3) = 3(4,3) = (12,3)$ sedangkan $\alpha u + \beta u = 1(4,3) + 2(4,3) = (4,3) + (8,3) = (12,6)$
Jadi, $(\alpha + \beta)u \neq \alpha u + \beta u$. Bukan ruang vektor.

(ii) Di sini aksioma (B7) juga tidak terpenuhi. Ambil $\alpha = 2$, $\beta = -3$ serta $u = (2,5)$, maka:

$(\alpha + \beta)u = (2 - 3)(2,5) = (2,5)$, sedangkan $\alpha u + \beta u = 2(2,5) + (-3)(2,5) = (4,10) + (6,15) = (10,25)$

Jadi, $(\alpha + \beta)u \neq \alpha u + \beta u$. Bukan ruang vektor.

2.19. Diketahui $V = R^3$. Buktikan bahwa W merupakan ruang vektor bagian dari R^3 bila :

(i) $W = \{[a,b,c] \mid a + b + c = 0\}$. dengan perkataan lain, himpunan vektor-vektor dengan penjumlahan komponennya = 0.

(ii) $W = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in R^3, \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b} = 0\}$ dimana $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ vektor tertentu $\in R^3$.

Penyelesaian:

(i) Kita tunjukkan W memenuhi ketiga syarat (C1), (C2), dan (C3).

(C1) $W \neq \phi$ karena $0 = [0,0,0]$ memenuhi $0 + 0 + 0 = 0$ berarti $\boldsymbol{0} \in W$.

(C2) Vektor sebarang $\boldsymbol{a} = [a_1,a_2,a_3]$ dan $\boldsymbol{b} = [b_1,b_2,b_3]$ α W berarti $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ dan $b_1 + b_2 + b_3 = 0$.

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = [a_1+b_1,a_2+b_2,a_3,b_3]$ jelas $\in$ W karena $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 = (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = 0 + 0 = 0$.

(C3) Bila α skalar riil maka $\alpha\boldsymbol{a} = [\alpha a_1,\alpha a_2, \alpha a_3]$ jelas $\in$ W karena $\alpha a + \alpha a_2 + \alpha a_3 = \alpha(a_1 + a_2 + a_3) = \alpha 0 = 0$.

Jadi W ruang vektor bagian dari $\in R^3$.

(ii) (C1) $W \neq \phi$ karena $\boldsymbol{0}.\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{b} = 0$. Jadi $\boldsymbol{0} \in W$

(C2) Ambil sebarang $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v} \in W$ berarti $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ dan $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b} = 0$. Jelas bahwa
$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$ karena $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}$
$= 0 + 0 = 0$ dan $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{v}.\ \boldsymbol{b}$
$= 0 + 0 = 0$. Jadi $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

(C3) Ambil α riil maka $\alpha\boldsymbol{u} \in W$ karena $(\alpha\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{a} = (\alpha(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}) = \alpha 0 = 0$ dan $(\alpha\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b}) = \alpha 0 = 0$. Jadi $(\alpha\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

Jadi W ruang vektor bagian dari R^3.

2.20. Misalkan $V = R^3$. Tunjukkan bahwa W bukan ruang vektor bagian dari V, di mana:

(i) $W = \{[a,b,c] \mid a^2 = b^2 + c^2 \leq 1\}$, dengan perkataan lain, W beranggotakan vektor-vektor dengan komponen pertamanya tidak negatif.

(ii) $W = \{[a,b,c] \mid a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$. dengan perkataan lain, W beranggotakan vektor-vektor yang panjangnya tidak melebihi satu.

Penyelesaian:

(i) Kita cari suatu contoh penyangkalan terhadap aksioma ruang vektor bagian. Ambil misalnya $\boldsymbol{u}$ = [3,2,1] $\in$ W dan $\leq$ = -2, maka (C3) tak terpenuhi karena -2$\boldsymbol{u}$ = [-6, -4, -2] $\notin$ W.

(ii) Ambil misalnya u = [1,0,0] dan v = [0,0,1] $\in$ W karena u = v = 1. Tetapi u + v = [1,0,1] panjangnya $\sqrt{2}$, jadi $\notin$ W.

2.21. Diketahui U dan W adalah ruang vektor bagian dari ruang vektor V. Tunjukkan bahwa:

(i) $U \cap W = \{ x \mid x \in U \text{ dan } x \in W\}$

(ii) $U + W = \{x + y \mid x \in U, y \in W\}$. merupakan ruang vektor bagian dari V.

Penyelesaian:

(i) (C1) Jelas karena baik U maupun W ruang vektor berarti 0 $\in$ U, 0 $\in$ W atau 0 $\in$ U $\cap$ W, berarti U $\cap$ W tidak hampa.

(C2) Ambil a $\in$ U $\cap$ W berarti a $\in$ U, a $\in$ W
dan b $\in$ U $\cap$ W b $\in$ U, b $\in$ W
a + b $\in$ U karena U ruang vektor.
a + b $\in$ W karena W ruang vektor.
Jadi a + b $\in$ U $\cap$ W.

(C3) Ambil a $\in$ U $\cap$ W berarti a $\in$ U, a $\in$ W dan untuk α skalar maka:
αa $\in$ U karena U ruang vektor,
αa $\in$ W karena W ruang vektor.
Berarti αa $\in$ U $\cap$ W. Maka U $\cap$ W adalah ruang vektor bagian dari V.

(ii) (C1) $0 = \underset{\in U}{0} + \underset{\in W}{0}$, jadi 0 $\in$ U + W

(C2) Ambil a $\in$ U + W berarti $a = \underset{\in U}{u_1} + \underset{\in W}{w_1}$

$b = u_2 + w_2$

$$\begin{aligned} a + b &= (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) \\ &= \underset{\in U}{(u_1 + u_2)} + \underset{\in W}{(w_1 + w_2)} \end{aligned}$$

Jadi a + b $\in$ U + W.

(C3) Ambil $a \in U + W$ berarti $a = u_1 + w_1$ di mana $u_1 \in U$ serta $w_1 \in W$. Bila α skalar maka $\alpha a = \alpha(u_1 + w_1) = \alpha u_1 + \alpha w_1$, dimana $\alpha u1 \in U$ dan $\alpha\ w_1 \in W$. Jadi $\alpha a \in U + W$.

Maka U + W ruang vektor bagian dari V.

2.22. Selidiki bebas linier/bergantung linierkah himpunan vektor-vektor berikut:

(i) $\boldsymbol{u} = [2,1,1]$, $\boldsymbol{v} = [2,1,3]$

(ii) $\boldsymbol{u} = [4,3,-1,1]$, $\boldsymbol{v} = [8,6,-2,2]$

(iii) $\boldsymbol{u} = [1,3,21/2]$, $\boldsymbol{v} = [5,-2,2,\mu]$, $\boldsymbol{0} = [0,0,0,0]$, $\boldsymbol{w} = [1,2,3,100]$

(iv) $\boldsymbol{u} = [1,2,3]$, $\boldsymbol{v} = [2,1,4]$, $\boldsymbol{w} = [2,0,0]$, $x = [1,1,1]$

(v) $\boldsymbol{u} = [9,17,23,14,0]$, $\boldsymbol{v} = [4,5,7,9,11]$, $\boldsymbol{w} = [18.34.46.28.0]$, $\boldsymbol{x} = [-1,2,-1,-2,2]$

(vi) $\boldsymbol{u} = [2,3,7]$, $\boldsymbol{v} = [1,0,2]$, $\boldsymbol{w} = [1,-3,-1]$

Penyelesaian:

(i) Bebas linier karena tidak berkelipatan

(ii) Bergantung linier karena berkelipatan, $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u}$.

(iii) Karena terkandung vektor nol, maka bergantung linier.

(iv) Karena vektor-vektor $\in R^3$, sedang banyak vektor 4, maka bergantung linier.,

(v) Terlihat bahwa $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{w}$ berkelipatan, jadi $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\}$ bergantung linier, jadi karena sebagian bergantung linier maka keseluruhan $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}\}$ juga bergantung linier.

(vi) Kita hendak menggunakan Teorema (4), dengan memeriksa apakah u kombinasi linier dari $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\}$

$$2 = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{.........(1)}$$
$$3 = \quad - 3\lambda_2 \quad \text{.........(2)}$$
$$7 = 2\lambda_1 - \lambda_2 \quad \text{........(3)}$$

Bila (1) dan (2) diselesaikan, diperoleh $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, yang juga memenuhi (3). Jadi, $\boldsymbol{u}$ kombinasi linier $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\}$. Berarti menurut Teorema(4) ketiga vektor tersebut bergantung linier.

2.23. Diketahui vektor-vektor $\{u,v,w\}$ bebas linier. Apakah $\{u + v, v + w, w + u\}$ bebas linier?

Penyelesaian:

Bebas linier. Karena $\{u,v,w\}$ bebas linier maka $\alpha_1 u + \alpha_2 v + \lambda_3 w = 0$ berakibat $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0$.

Pandang persamaan: $\lambda_1(u + v) + \lambda_2)v + w) + \lambda_3(w + u) = 0$ yang dapat ditulis $(\lambda_1 + \lambda_3)u + (\lambda_1 + \lambda_2)v + (\lambda_2 + \lambda_3)w = 0$. Hal itu berarti:

$\lambda_1 + \lambda_3 = \alpha_1 = 0$ .... (1)

$\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha_2 = 0$ .... (2)

$\lambda_2 + \lambda_3 = \alpha_3 = 0$ .... (3)

(2) - (1): $\lambda_2 - \lambda_3 = 0$ dan dengan (3) menghasilkan $\lambda_2 = 0$. Selanjutnya diperoleh pula $\lambda_3 = 0$ dan $\lambda_1 = 0$. Berarti $\{u + v, v + w, w + u\}$ himpunan bebas linier.

2.24. Diketahui V adalah ruang vektor dari semua fungsi-fungsi dengan variabel t. Tunjukkan bahwa $f_1 = e^t$ dan $f_2 = e^{2t}$ bebas linier.

Penyelesaian:

Kita tunjukkan bahwa persamaan $\alpha_1 f_1 + a_2 f_2 = 0$ hanya terpenuhi oleh $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Untuk itu $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0 \rightarrow \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{2t} = 0$ .... (1)

kita turunkan terhadap t, diperoleh:

$\alpha_1 e^t + 2\alpha_2 e^{2t} = 0$ .... (2)

Bila (2) - (1), diperoleh $\alpha_2 e^{2t} = 0$ dalam hal ini $e^{2t} \neq 0$, berarti haruslah $\alpha_2 = 0$. Dan apabila kembali ke-(1), diperoleh $\alpha_1 = 0$. Jadi bebas linier. Dapat juga kita kerjakan sebagai berikut: $\alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{2t} = 0$ berlaku untuk setiap t, berarti ambil

$t = 0 \rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0$ .... (*)

$t = 1 \rightarrow \alpha_1 e_1 + \alpha_1 e_2 = 0$ .... (**)

Kalikan (*) dengan e lalu kurangkan ke-(**) diperoleh $\alpha_2 e^2 - \alpha_2 e = 0$ atau $\alpha_2(e^2 - e) = 0 \rightarrow \alpha_2 = 0$, dan dari (*) diperoleh $\alpha_1 = 0$.

2.25. Untuk harga k yang mana $u = [1,-2,k]$ merupakan kombinasi linier $v = [3,0.-2]$, $w = [2,-1,-5]$.

Penyelesaian:

$[1,-2,k] = \lambda_1[3,0,-2] + \lambda_2[2,-1,-5]$ atau :

$$1 = 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$-2 = \quad - \lambda_2 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$
$$k = -2\lambda_1 - 5\lambda_2 \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ yang mana harus pula memenuhi persamaan (3), berarti $k = 2 - 10 = -8$.

2.26. Carilah hubungan antara a, b, c supaya vektor $[a,b,c]$ anggota ruang vektor yang dibentuk oleh $\boldsymbol{p} = [3,3,1]$, $\boldsymbol{q} = [0,2,2]$.

Penyelesaian:

Suatu vektor $\boldsymbol{u} \in L\ \{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\}$, syaratnya $\boldsymbol{u}$ merupakan kombinasi linier dari $\{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\}$.

$[a,b,c] = \lambda_1[3,3,1] + \lambda_2[0,2,2]$, atau:

$$a = 3\lambda_1 + 0\lambda_2 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$b = 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$
$$c = \lambda_1 + 2\lambda 2 \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Kita akan menghilangkan λ_1 dan λ_2. Dari (1) didapat $\lambda_1 = a/3$, dan kalau disubstitusikan ke (2), diperoleh $\lambda_2 = b/2 - a/2$. Jadi (3) menjadi $c = a/3 + b - a$ atau $-2a + 3b - 3c = 0$.

2.27. Apakah vektor-vektor berikut anggota {p,q} pada soal (2.26)?

(i) $[1,3,1]$; (ii) $[3,5,3]$; (iii) $[3\sqrt{2}.\sqrt{2}.-\sqrt{2}]$

(i) $u \notin L\{p,q\}$ karena $-2.1 + 3.3 - 3.1 = 4 \neq 0$

(ii) $v \in L\{p,q\}$ karena $-2.3 + 3.5 - 3.3 = 0$

(iii) $w \in L\{p,q\}$ karena $-2.3\sqrt{2} + 3.\sqrt{2} - 3(-\sqrt{2}) = 0$.

2.28. Tentukan dimensi dari ruang vektor yang dibentuk oleh:

(i) $\boldsymbol{p}\ [1,-2,3,1]$, $\boldsymbol{q} = [2,-4,5,2]$

(ii) $\boldsymbol{u} = [5,7,11,4]$, $\boldsymbol{v} = [10,14,22,8]$

Penyelesaian:

(i) Kedua vektor pembentuk tidak berkelipatan, jadi sistem pembentuk bebas linier. Berarti dimensi = 2.

(ii) Kedua vektor berkelipatan. Vektor u maupun $\boldsymbol{v} \neq 0$. Jadi, baik $\{\boldsymbol{u}\}$ maupun $\{\boldsymbol{v}\}$ merupakan sistem pembentuk yang bebas linier. Jadi, dimensi = 1.

2.29. Diketahui ruang vektor L_1 dibentuk oleh $u_1 = [2,1,1]$ dan $v_1 = [0,2,3]$, sedangkan L_2 dibentuk oleh $u_2 = [1,3,1]$ dan $v_2 = [1,2,6]$. Tentukan ruang vektor $L_1 \cap L_2$, yaitu ruang vektor yang anggota-anggotanya $\in L_1$ dan $\in L_2$.

Penyelesaian:

Misalkan $[a,b,c] \in L_1 \cap L_2$ berarti $[a,b,c] \in L_1$ dan $[a,b,c\} \in L_2$.

Yang mana berarti:
$[a,b,c] = \lambda_1[2,1,1] + \lambda_2[0,2,3] = \lambda_3[1,3,1] + \lambda_4[1,2,6]$

diperoleh: $2\lambda_1 + 0\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0$ .... (1)
$\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0$ .... (2)
$\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 - 6\lambda_4$ .... (3)
(1) - (2 kali)(2) : $-4\lambda_2 + 5\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0$ .... (4)
(1) - (2 kali)(3) : $-6\lambda_2 + \lambda_3 + 11\lambda_4 = 0$ .... (5)
(2) - (3) : $-\lambda_2 - 2\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0$ .... (6)
(4) - (4 kali)(6) : $13\lambda_3 - 13\lambda_4 = 0$ .... (7)
(5) - (6 kali)(6) : $13\lambda_3 - 13\lambda_4 = 0$ .... (8)

Persamaan (7) dan (8) adalah ekivalen. Jadi, cukup diambil satu persamaan, diperoleh $\lambda_3 = \lambda_4 = \mu$ sebarang. Dan dari (6) diperoleh $\lambda_2 = 2\mu$ dan dari (3): $\lambda_1 = \mu$. Berarti $[a,b,c] = \mu[2,1,1] + 2\mu[0,2,3] = \mu[2,5,7]$. Jadi $L_1 \cap L_2$ merupakan ruang vektor berdimensi satu yang dibentuk oleh[2,5,7] atau $L_1 \cap L_2 = L\{[2,5,7]\}$.

2.30. Apakah himpunan vektor-vektor ini merupakan basis R^3?
(i) [1,1,1] , [1,-2,3]
(ii) [1,0,0] , [1,1,0] , [1,1,1]
(iii) [1,1,2] , [1,2,5] , [5,3,4]

Penyelesaian:

(i) Bukan, karena dimensi $R^3 = 3$, berarti basis harus terdiri atas tiga vektor.

(ii) Sebagai basis, ketiga vektor harus bebas linier. Diselidiki:
$\lambda_1[1,0,0] + \lambda_2[1,1,0] + \lambda_3[1,1,1] = [0,0,0]$ atau :
$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$
$\lambda_2 + \lambda_3 = 0$
$\lambda_3 = 0$
Jelas $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$, berarti bebas linier, sehingga ketiga vektor tersebut basis dari R^3.

(iii) Kita selidiki apakah bebas linier.
$\lambda_1[1,1,2] + \lambda_2[1,2,5] + \lambda_3[5,3,4] = [0,0,0]$, atau :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \quad \text{....... (1)}$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \quad \text{....... (2)}$$
$$2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \quad \text{....... (3)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) - (2) : & -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ (3) - (2 \text{ kali})(1) : & 3\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \text{ ekivalen, berarti}$$

$\lambda_2 = 2\lambda_3$ sebarang. Boleh kita ambil $\lambda_3 \neq 0$, jadi terdapat α yang $\neq 0$ .Berarti bergantung linier. Maka ketiga vektor tersebut bukan basis R^3.

Catatan:

Di atas kita peroleh satu persamaan dengan dua anu : $\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0$. Di sini kita boleh mengambil harga salah satu anu tersebut, sebarang dan yang lainnya tergantung kepada pengambilan harga tersebut (secara lebih mendalam, persamaan seperti ini dibicarakan dalam Bab VI).

2.31 Tentukan dimensi dan basis dari ruang vektor yang dibentuk oleh :
(i) $\boldsymbol{a} = [1,1,2]$, $\boldsymbol{b} = [1,2,5]$, $\boldsymbol{c} = [5,3,4]$.
(ii) $\boldsymbol{p} = [1,2,2]$, $\boldsymbol{q} = [2,4,4]$, $\boldsymbol{a} = [1,0,1]$.
(iii) $\boldsymbol{u} = [1,0,1]$, $\boldsymbol{v} = [3,0,3]$, $\boldsymbol{w} = [2,0,2]$.

Penyelesaian:

(i) Dari soal (2.30)(iii) di atas ketiga vektor bergantung linier. Kita hendak mencari banyak maksimum di antara $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ yang bebas linier. Dua vektor, misalnya a dan b bebas linier (tak berkelipatan). Jadi, dimensi = 2. Sebagai basis dapat dipilih $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$.

(ii) Karena $\boldsymbol{p}$ dan $\boldsymbol{q}$ berkelipatan maka $\{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{a}\}$ bergantung linier. Dan karena 2 vektor, misalnya, $\{\boldsymbol{p},\boldsymbol{a}\}$ bebas linier berarti dimensi = 2. Sebagai basis dapat diambil $\{\boldsymbol{p},\boldsymbol{a}\}$.

(iii) Ketiga vektor saling berkelipatan, jadi hanya satu vektor yang bebas linier. Dimensi = 1. Sebagai basis dapat diambil $\{\boldsymbol{u}\}$.

2.32. Tunjukkan bahwa ruang vektor L_1 yang dibentuk oleh $\boldsymbol{a} = [2,1,1]$, $\boldsymbol{b} = [3,0,-1]$, $\boldsymbol{c} = [1,2,4]$ dan ruang vektor L_2 yang dibentuk oleh $\boldsymbol{p} = [1,-1,-3]$, $\boldsymbol{q} = [5,-2,-8]$ adalah sama.

Penyelesaian:

Untuk menunjukkan $L_1 = L_2$, sebaiknya kita periksa dahulu apakan dimensi mereka sama. Bila tidak sama, jelas $L_1 \neq L_2$. Kemudian kita tentukan basis L_1 serta basis L_2. Maka $L_1 = L_2$ bila masing-masing vektor basis dari L_2 merupakan anggota L_1 (jadi kombinasi linier dari basis L_1). Tentu saja boleh sebaliknya: vektor-vektor basis L_1 merupakan kombinasi linier basis L_2.

Pandang L_1: Apabila kita selidiki maka dimensi $L_1 = 2$, karena $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ bebas linier sedangkan $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ bergantung linier.

Pandang L_2: Ternyata juga berdimensi 2 karena $\{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\}$ bergantung linier.

Sekarang kita selidiki apakah $\boldsymbol{p}$ dan $\boldsymbol{q}$, masing-masing kombinasi linier dari basis L_1 yaitu $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$.

$[1,-1,-3] = \lambda_1[2,1,1] + \lambda_2[3,0,-2]$ atau:

$$\left.\begin{aligned} -1 &= 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ -1 &= \lambda_1 + 0\lambda_2 \\ -3 &= \lambda_1 - 2\lambda_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{Ternyata } \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1 \text{ memenuhi ketiga}$$

persamaan. Jadi, $\boldsymbol{p}$ kombinasi linier $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$.

$[5,-2,-3] = \mu_1[2,1,1] + \mu_2[3,0,-2]$ atau :

$$\begin{aligned} 5 &= 2\mu_1 + 3\mu_2 \\ -2 &= \mu_1 + 0\mu_2 \\ -8 &= \mu_1 - 2\mu_2 \end{aligned}$$

Diperoleh $\mu_1 = -2$, $\mu_2 = 3$ yang memenuhi ketiga persamaan.

Jadi, $\boldsymbol{q}$ kombinasi linier $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$. Maka $L_1 = L_2$.

2.33. Diketahui L dibentuk oleh $\boldsymbol{p} = [1,3,1]$, $\boldsymbol{q} = [2,1,0]$ dan $\boldsymbol{r} = [4,x-2,2]$.

Ditanya:

(i) Nilai x supaya L berdimensi 2.
(ii) Nilai y supaya vektor $\boldsymbol{a} = [3,2\text{-}y,4] \in L\{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}\}$.
(iii) Tentukan koordinat $\boldsymbol{a}$ di atas relatif terhadap basis $\{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\}$.

Penyelesaian:

(i) Supaya L berdimensi 2 maka $\{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}\}$ bergantung linier. Maka r merupakan kombinasi linier dari $\{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\}$.

$[4,x-2,2] = \lambda_1[1,3,1] + \lambda_2[2,1,0]$, atau:

$$4 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \qquad \text{........ (1)}$$
$$x - 2 = 3\lambda_1 + \lambda_2 \qquad \text{........ (2)}$$
$$2 = \lambda_1 \qquad \text{........ (3)}$$

Dari persamaan (3) dan (1) diperoleh $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, yang harus memenuhi persamaan (2), berarti $x = 9$.

(ii) Kita ambil sebagai basis adalah $\{p,q\}$. $\boldsymbol{a} \in L\{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}\}$, maka $\boldsymbol{a}$ kombinasi linier dari basis $\{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\}$:

$[3,2-y,4] = \mu_1[1,3,1] + \mu_2[2,1,0]$, atau:

$$3 = \mu_1 + 2\mu_2 \qquad \text{....... (4)}$$
$$2 - y = 3\mu_1 + \mu_2 \qquad \text{....... (5)}$$
$$4 = \mu_1 \qquad \text{....... (6)}$$

Dari (6) dan (4) diperoleh $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = -{}^1/_2$, sehingga diperoleh dari (2): $y = -9{}^1/_2$.

(iii) $\boldsymbol{a} = \mu_1 p + \mu_2 \boldsymbol{q} = 4p - {}^1/_2\boldsymbol{q}$.

Jadi, koordinat $\boldsymbol{a}$ relatif terhadap $\{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\}$ adalah $[4,-{}^1/_2]$.

2.34. Tunjukkan bahwa garis lurus $[x,y,z] = [1,0,0] + \lambda[3,1,3]$ sejajar bidang rata $[x,y,z] = [2,1,1] + \lambda[4,2,0] + \mu[1,1,-3]$

Penyelesaian:

Cukup kita tunjukkan bahwa vektor arah garis lurus kombinasi linier dari vektor-vektor arah bidang rata.

Ternyata $[3,1,3] = \lambda_1[4,2,0] + \lambda_2[1,1,-3]$ terpenuhi oleh $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Jadi garis lurus sejajar bidang rata.

2.35. Periksa apakah keempat titik A(0,0,2), B(0,3,-2), C(1,2,-1), D(6,0,0) sebidang *(koplanar)*. Tentukan persamaan bidang ratanya.

Penyelesaian:

Kita tentukan dahulu bidang rata V melalui A, B dan C. Kemudian diperiksa apakah D terletak pada V. Untuk itu ambil vektor-vektor arah dari V: ***AB*** = [0,3,-4], ***AC*** = [1,2,-3]; serta vektor ***AD*** = [6,0,-2]. Diperiksa apakah ***AD*** kombinasi linier dari {***AB,AC***}.

Ternyata $[6,0,-2] = \lambda_1[0,3,-4] + \lambda_2[1,2,-3]$ terpenuhi oleh $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 6$. Jadi A, B, C, D sebidang, yaitu bidang V. Bidang V melalui A(0,0,2) dengan vektor-vektor arah ***AB*** dan ***AC***, persamaannya $[x,y,z] = [0,0,2] + \lambda[0,3,-4] + \mu[1,2,-3]$.

2.10. SOAL-SOAL LATIHAN

2.36. Pandang $W = \{(x,y) \mid x,y \in R\}$, R himpunan bilangan riil, dengan operasi penjumlahan: $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ dan perkalian skalar $\alpha(a,b) = (\alpha a,0)$. Tunjukkan bahwa W memenuhi semua aksioma ruang vektor kecuali (B9) yaitu untuk setiap $u \in W$ berlaku $1u = u$. Jadi, W bukan ruang vektor di atas field R.

2.37. V adalah himpunan pasangan berurutan bilangan riil (a,b). Tunjukkan bahwa V bukan ruang vektor terhadap operasi-operasi:

(i) $(a,b) + (c,d) = (a + d, b + c)$; $\alpha(a,b) = (\alpha a,ab)$.

(ii) $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$; $\alpha(a,b) = (a,b)$.

(iii) $(a,b) + (c,d) = (0,0)$; $\alpha(a,b) = (\alpha a,ab)$.

(iv) $(a,b) + (c,d) = (ac,bd)$; $\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$

2.38. U dan W ruang vektor atas field K. $V = U \times W = \{(u,w \mid u \in U, w \in W\}$. Tunjukkan bahwa V merupakan ruang vektor di atas K terhadap operasi pada V sebagai berikut: $(u_1,w_1) + (u_2,w_2) = (u_1 + u_2, w_1 + w_2)$, $\alpha(u_1,w_1) = (\alpha u_1,\alpha w_1)$.

2.39. Tetapkan apakah himpunan bagian W dari R^3 merupakan ruang bagian, bila :

(i) $W = \{(a,b,c) \mid a = 2b\}$

(ii) $W = \{(a,b,c) \mid a \leq b \leq c\}$

(iii) $W = \{(a,b,c) \mid a,b,c$ bilangan bulat$\}$
(iv) $W = \{(a,b,c) \mid a = c^2\}$

Jawab:
(i) ya; (ii) bukan; (iii) bukan; (iv) bukan.

2.40. Misalkan V adalah ruang vektor dari fungsi-fungsi berharga riil dengan satu variabel x pada interval $-1 \leq x \leq 1$. Apakah L, himpunan bagian dari V, merupakan ruang bagian, bila:

(i) $L = \{f \mid f(0) = 0\}$: himpunan semua fungsi yang berharga 0 untuk $x = 0$.

(ii) $L = \{f \mid f(x) = 0$ untuk $-1 \leq x \leq {}^1/_2\}$; himpunan semua fungsi yang berharga nol pada interval $-1 \leq x \leq {}^1/_2$.

(iii) $L = \{f \mid f(x) = f(-x)$: himpunan semua fungsi genap.

(iv) $L = \{f \mid f(x) \leq 0\}$: himpunan semua fungsi tidak positif.

(v) $L = \{f \mid f(-1) = 3 + f(1)\}$.

Jawab :
(i) ya; (ii) ya; (iii) ya: (iv) bukan; (v) bukan.

2.41. Tentukan apakah himpunan vektor-vektor $\in R^n$ berikut bebas linier:
(i) $\{[2,1,3,-\sqrt{5}]\}$;
(ii) $\{[0,0,...,0]\}$;
(iii) $\{[2,1], [0,0]\}$;
(iv) $\{[1,2,1], [3,0,1]\}$;
(v) $\{[3,1,\sqrt{2}], [3,\sqrt{2},\sqrt{2},2]\}$;
(vi) $\{[1,1], [1,3], [2,0]\}$;
(vii) $\{[2,-1,4], [1,1,2], [5,2,7]\}$;
(viii) $\{[1,3,0,2], [5,4,2,1], [4,1,2,-1]\}$;
(ix) $\{[1,1,2], [2,2,4], [a,a,2a]\}$;
(x) $\{[2\sqrt{2}, \sqrt{3},3], [4,\sqrt{6},3\sqrt{2}], [2\sqrt{6},3,3\sqrt{3}]\}$

Jawab:
(i) bebas;
(ii) bergantung;
(iii) bergantung;
(iv) bebas;
(v) bergantung;

(vi) bergantung;
(vii) bebas;
(viii) bergantung;
(ix) bergantung;
(x) bergantung.

2.42. Apakah himpunan fungsi-fungsi berikut bebas linier.
(i) $\{1, t-1, t^2-t, t^3-t^2\}$.
(ii) $\{t, -t^2-t, t^3-t\}$.
(iii) $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$.
(iv) $\{\sin t, \cos t, 1\}$.
(v) $\{e^t, te^t, t^2e^t\}$.
(vi) $\{\ln t, \ln t^2, \ln t^3\}$.
(vii) $\{e^t, \ln t, t\}$
(viii) $\{\cos t, \cos^2 t, \cos^3 t\}$.
(ix) $\{\sin t, \sin (t + 1), \cos t\}$.
(x) $\{2+t-3t^2, 4+2t-6t^2\}$.

Jawab:
Semua bebas kecuali (vi) dan (x).

2.43. Tulis $\boldsymbol{a}$ sebagai kombinasi linier dari $\{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}\}$ bila:
(i) $\boldsymbol{a} = [2,6,6]$, $\boldsymbol{p} = [1,3,2]$, $\boldsymbol{q} = [2,0,1]$, $\boldsymbol{r} = [-1,3,3]$.
(ii) $\boldsymbol{a} = [0,-2,1]$, $\boldsymbol{p} = [2,0,1]$, $\boldsymbol{q} = [1,1,0]$, $\boldsymbol{r} = [0,0,0]$.
(iii) $\boldsymbol{a} = [4,5,6]$, $\boldsymbol{p} = [1,2,1]$, $\boldsymbol{q} = [2,1,4]$, $\boldsymbol{r} = [1,8,-3]$.
(iv) $[0,0,5,6,-5]$ $\boldsymbol{p} = [4,2,1,-2,3]$, $\boldsymbol{q} = [2,1,3,2,-1]$, $\boldsymbol{r} = [6,3,-1,-6,7]$.

Jawab:
(i) $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$;
(ii) $\boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{q} + \alpha\boldsymbol{r}$ (α skalar, sebarang);
(iii) $2\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} + 0\boldsymbol{r}$;
(iv) $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$.

2.44. Tuliskan fungsi v sebagai kombinasi linier dari fungsi g_1, g_2, dan g_3 bila:
(i) $v = t^2 + 4t - 3$, $g_1 = t^2 - 2t + 5$,
$g_2 = 2t^2 - 3t$, $g_3 = t + 3$.
(ii) $v = 2t^2 - 3t - 4$, $g_1 = t^2 - 2t - 3$,
$g_2 = 4t^2 - 6t - 1$, $g_3 = 3t^2 + 8t - 5$.

Jawab:

(i) $v = -3g_1 + 2g_2 + 4g_3$;

(ii) $v = {}^1/_2 g_1 + 0g_2 + {}^1/_2 g_3$.

2.45. Diketahui $u = [1,-3,2]$, $v = [2,-1,1] \in R^3$.

Ditanya:

(a) Tulis [1,7,4] sebagai kombinasi linier dari $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}$.

(b) Tulis [2,-5,4] sebagai kombinasi linier dari $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}$.

(c) Tentukan x supaya [1,x,5] kombinasi linier dari $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}$.

(d) Carilah hubungan antara x, y, z supaya vektor [x,y,z] kombinasi linier dari $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}$.

(e) Dengan menggunakan hasil (d) di atas periksa apakah vektor berikut kombinasi linier dari $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}$.

(i) [5,-5,4],

(ii) [5,-13,10].

Jawab:

(a) $-3\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$;

(b) tak dapat;

(c) $x = -8$;

(d) $x - 3y - 5z = 0$;

(e) (i) ya;

(ii) tidak.

2.46. Diketahui $\boldsymbol{a} = [1,1,1]$; $\boldsymbol{b} = [0,1,1]$; $\boldsymbol{c} = [0,1,-1]$, membentuk suatu ruang vektor L. Buktikan $I = R^3$.

2.47. Diketahui $\boldsymbol{a} = [1,2,1]$, $\boldsymbol{b} = [2,4,1]$, $\boldsymbol{c} = [3,x,2]$.
Tentukan x supaya $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ merupakan basis R^3.

2.48. Tentukan basis dan dimensi dari L $\{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}\}$ bila:

(i) $\boldsymbol{p} = [0,1,1]$, $\boldsymbol{q} = [0,2,-1]$, $\boldsymbol{r} = [0,0,1]$;

(ii) $\boldsymbol{p} = [2,0,1]$, $\boldsymbol{q} = [1,0,{}^1/_2]$, $\boldsymbol{e} = [0,0,0]$.

Jawab:

(i) 2, (ii) 1.

2.49. Apakah L_1 dan L_2 sama, bila:

(i) L_1 {[1,3,5], [1,4,3], [1,1,9]}, L_2 {[1,2,3], [-2,-3,-4], [7,12,17]} (sama).

(ii) L_1 {[1,-2,-1], [3,-4,5], L_2 {[1,-1,3], [2,-1,10], [3,-5,1]} (sama)

(iii) L_1 $\{x,x^2\}$, $L_2\{3x,x^2-2x\}$ (sama).

2.50. Periksa apakah vektor-vektor berikut ∈ ruang vektor yang dibentuk oleh {[2,3,1], [5,7,0], [9,13,2]}.

(i) [9,27,3];
(ii) [4,6,2];
(iii) [4,6,3];
(iv) [0,9,5].

Jawab:
(i) tidak (ii) ya (iii) tidak (iv) tidak

2.51. Tentukan t supaya vektor-vektor berikut anggota dari ruang vektor pada soal (2.50) di atas.

(i) [4,5-t,1];
(ii) [t,2,3];
(iii) [t,2-t,3].

Jawab:
(i) $-^4/_5$ (ii) 1; (iii) $^7/_{12}$

2.52. Tentukan vektor 0 yang terletak di L_1, ruang vektor yang dibentuk oleh {[2,5,3], [1,-1,2]}, terletak pula pada L_2 yang dibentuk oleh {[1,0,1], [2,4,4]}.

Jawab:
μ [3,4,5], $\mu \neq 0$ sebarang skalar.

2.53. Apakah tiga titik berikut segaris:

(i) [2,1,0], [5,2,3], [-1,-1,3] (tidak).
(ii) [2,1,1], [-2,-1,1], [6,-1,1] (ya).
(iii) [3,2,1,0], [2,1,1,1], [1,1,0,-1] (tidak).

2.54. Apakah empat titik berikut sebidang.

(i) (3,4,1), (-1,2,5), (1,7,1), (0,0,0) (tidak)

(ii) (4,2,1), (-1,-2,2), (0,4,-5), (3,-4,8) (ya).

2.55. Tentukan persamaan bidang rata melalui (2,-1,5) serta sejajar garis lurus $[x,y,z] = [3,1,6] = \lambda[2,3,-1]$ dan $[x,y,z] = [5,0,7] + \lambda[1,4,2]$.

Jawab:

$[x,y,z] = [2,-1,5] + \lambda[2,3,-1] + \mu[1,4,2]$.

2.56. Buktikan garis lurus $[x,y,z] = [2,0,1] + \lambda[7,3,1]$ sejajar bidang rata $[x,y,z] = [2,0,1] = \lambda[4,1,3] + \mu[3,2,-2]$.

BERGANTUNG LINIER

```
10 CLS
20 'program memeriksa apakah 3 vektor di R3 bergantung linier
30 'dan menentukan hubungan kombinasi liniernya
40 PRINT "VEKTOR a=";:INPUT A,B,C
50 PRINT "VEKTOR b=";:INPUT D,E,F
60 PRINT "VEKTOR c=";:INPUT G,H,I
70 IF (A*E -B*D) <> 0 THEN 100
80 SWAP B,C:SWAP E,F:SWAP H,I
90 IF (A*E -B*D) = 0 THEN PRINT "VEKTOR A DAN B BERKELIPATAN":
   GOTO 180
100 ALPHA = (G*E*H*D)/(A*E*B*D)
110 BETA = (A*H -B*G)/(A*E*B*D)
120 IF (ALPHA*C + BETA*F)= I THEN 140
130 PRINT"KETIGA VEKTOR BEBAS LINIER': GOTO 180
140 PRINT"KETIGA VEKTOR BERGANTUNG LINIER"
150 PRINT"DENGAN HUBUNGAN:"
160 IF BETA>= 0 THEN PRINT"c = ";ALPHA;"* a = ";BETA;"* b": GOTO 180
170 PRINT"c = ";ALPHA;"* a";BETA;"* b"
180 END
```