Bab.3 Matriks

3.1. Definisi Matriks

Matriks adalah himpunan skalar yang disusun menurut baris dan kolom.

Untuk batasnya adalah :

$$\left(\quad\right) \qquad \left[\quad\right] \qquad \left\|\quad\right\|$$

Notasi Matriks :

A = $\left(a_{ij}\right)$,

dimana a_{ij} adalah elemen pada baris ke i kolom ke j

Kesamaan Matriks

2 buah matriks A = $\left(a_{ij}\right)$ dan B = $\left(b_{ij}\right)$ dikatakan sama A = B jika ukuran nya sama yaitu (m x n) dan $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i dan j (i = 1,2,….,m ;j = 1,2,….,n)

3.2. Operasi Pada Matriks

a. Penjumlahan pada Matriks (berlaku untuk matriks –matriks yang berukuran sama).

Jika A = $\left(a_{ij}\right)$ dan B = $\left(b_{ij}\right)$, matriks yang berukuran sama , maka A + B adalah suatu matriks C = $\left(c_{ij}\right)$, di mana $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ untuk setiap i dan j.

Contoh :

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ maka

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+1 \\ 3+2 & 3+4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

b. Perkalian skalar terhadap matriks

Jika λ suatu scalar (bilangan) dan A = (a_{ij}) maka matriks $\lambda A = (\lambda a_{ij})$

Contoh :

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ maka 2A = $\begin{pmatrix} 2.1 & 2.2 \\ 2.3 & 2.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

c. Perkalian Matriks

Pada umumnya perkalian Matriks tidak komutatif terhadap operasi perkalian : AB $\neq$BA.

Syarat Perkalian Matriks :

Banyaknya kolom matriks pertama = banyaknya baris matriks kedua.

Definisi :

Misal A = (a_{ij}) berukuran (m x n) dan B = (b_{ij}) berukuran (n x p) .

Maka perkalian AB adalah suatu matriks C = (c_{ij}) berukuran (m x p)

di mana $c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj}$ untuk setiap I = 1,2,,,,,,m dan j = 1,2,….,p

Contoh :

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ maka

AB = $(1.2 + 2.0 + 3.1)$ = (5)

A (1x3) dan B (3x1) maka C (1x1)

3.3. Transpose dari suatu Matriks

Misal A = (a_{ij}) berukuran (m x n) maka transpose dari A adalah matriks A^T berukuran (nxm) maka

$A^T = (a_{ji})$.

Beberapa Sifat matriks transpose :

(i) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(ii) $(A^T)^T = A$

(iii) $\lambda(A^T) = (\lambda A)^T$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$

Catatan :

Bila Matriks A = (a_{ij}) adalah suatu matriks kompleks, Maka Transpose Hermitian (Conjugate Transpose) yaitu A^H = $\left(\bar{a}_{ij}\right)^T$ = $\left(\bar{a}_{ji}\right)$, jika z = x – yi maka $\bar{z}$ = x + yi

Contoh :

A = $\begin{pmatrix} 3-i & 1-i \\ i & 3 \end{pmatrix}$ maka A^H = $\begin{pmatrix} 3+i & 1+i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$

3.4. Beberapa Jenis Matriks Khusus

(1) Matriks Bujur Sangkar

Adalah suatu matriks dengan banyaknya baris = banyaknya kolom= n disebut berordo n

Contoh :

A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ adalah matriks bujur sangkar ordo 2

(2) Matriks Nol

adalah matriks yang semua elemennya nol (0)

(3) Matriks Diagonal

adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen di luar diagonal utama adalah nol

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(4) Matriks Identity (Satuan)

adalah matriks diagonal yang elemen –elemen diagonal utamanya semua sama dengan 1

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) Matriks Skalar

adalah matriks diagonal utamanya sama dengan k Matriks Identitas adalah bentuk khusus dari matriks skalar dengan k = 1

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(6) Matriks Segitiga Bawah (Lower Triangular)

adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen **di atas** diagonal utama sama dengan nol.

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(7) Matriks Segitiga Atas (Upper Triangular)

adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen **di bawah** diagonal utama sama dengan nol.

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(8) Matriks Simetris

adalah matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri, Dengan perkataan lain $\mathbf{A = A^T}$ dan matriks simetris merupakan matriks bujur sangkar.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(9) Matriks Antisimetris

adalah matriks yang transposenya adalah negatifnya, Dengan perkataan lain $\mathbf{A^T = -A}$

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(10) Matriks Hermitian

adalah matriks dengan transpose hermitiannya = dirinya sendiri. Dengan perkataan lain **A^H = - A**

Contoh

A = $\begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 4 \end{pmatrix}$ dan A^H = $\begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 4 \end{pmatrix}$

(11) Matriks Invers (Kebalikan) :

Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar ordo n dan berlaku **AB = BA + I** maka dikatakan B invers dari A dan ditulis **B = A^{-1}** sebaliknya A adalah invers dari B dan ditulis **A = B^{-1}**

(12) Matriks Komutatif.

adalah Jika A dan B matriks yang bujur sangkar dan berlaku **AB = BA.**

dan

Anti Komutatif

Jika **AB = -BA**

(13) Matriks Idempoten, Periodik, Nilpoten

♥ **Matriks Idempoten**

Jika A Matriks Bujur Sangkar dan berlaku AA = A^2 = A

♥ **Matriks Periodik**

Jika A Matriks Bujur Sangkar dan berlaku AAA…A = A^p = A dikatakan periodik dengan periode p-1

♥ **Matriks Nilpoten**

Jika A Matriks Bujur Sangkar dan berlaku A^r = 0, dikatakan Nilpoten dengan indeks r dan r bilangan bulat positip. 0 adalah matriks Nol.

3.5. Transformasi (Operasi) Elemen pada Baris dan Kolom Suatu Matriks

Yang di maksud dengan transformasi elementer pada baris/kolom suatu matriks A adalah sebagai berikut :

(1a) Penukaran tempat baris ke-i dan baris ke-j ditulis **H_{ij}(A).**

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ maka } H_{12}(A) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(1b) Penukaran tempat kolom ke-i dan kolom ke-j ditulis **K_{ij}(A).**

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ maka } K_{12}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

(2a) Memperkalikan baris ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis **$H_i^{(\lambda)}$ (A)**

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ maka } H_2^{(2)}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ di kali 2}$$

(2b) Memperkalikan kolom ke-j dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis **$K_j^{(\lambda)}$ (A)**

Contoh :

kali 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ maka } K_1^{(3)}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 12 & 5 & 6 \\ 21 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(3a) Menambah baris ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$ kali baris ke -j, ditulis **$H_{ij}^{(\lambda)}$ (A)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ maka } H_{21}^{(1)}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad (*)$$

(*) Baris 1 kali 1 tambahkan dengan baris 2 diletakkan di baris 2

(3b) Menambah kolom ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$ kali kolom ke -j, ditulis **$K_{ij}^{(\lambda)}$ (A)**

(*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ maka } K_{31}^{(2)}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 14 \\ 7 & 8 & 23 \end{pmatrix}$$

(*) kolom 1 kali 2 tambahkan dengan kolom 3 diletakkan di kolom 3

3.6. Matriks Ekivalen

Dua matriks A dan B disebut Ekivalen ($A \sim B$) apabila salah satunya dapat diperoleh dari yang lain dengan transformasi elementer terhadap baris atau kolom. Jika transformasi elementernya pada baris saja dikatakan ekivalen baris, dan jika kolom saja dikatakan ekivalen kolom.

Contoh :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ adalah ekivalen baris , karena $B = H_{12}(A)$

3.7. Matriks Elementer

adalah suatu matriks yang kita lakukan satu kali transformasi elementer terhadap suatu matriks identitas I

Contoh :

$H_{13}(I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $H_{31}^{(2)}\ (I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$K_{13}(I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K_{31}^{(2)}\ (I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.8. Ruang Baris (Row Space) dan Ruang Kolom (Coloum Space) dari suatu Matriks

Misal : Matriks A ukuran (4 x 5) sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$

Tiap – tiap baris/Kolom dari matriks A dapat di anggap sebagai vektor dan disebut vektor baris/kolom

Definisi :

Ruang baris dari matriks A (mxn) adalahsuatu ruang vektor bagian dari R^n yang dibentuk oleh vektor-vektor baris dari A.

Analog

Ruang kolom dari matriks A (mxn) adalahsuatu ruang vektor bagian dari R^n yang dibentuk oleh vektor-vektor kolom dari A.

3.9. Rank Matriks

Definisi :

Rank baris dari matriks A adalah dimensi dari ruang baris matriks A.
Rank kolom dari matriks A adalah dimensi dari ruang kolom matriks A.
Dan Ternyata Rank Baris = Rank Kolom ditulis **r(A)**

Catatan :

♥ Rank dari matriks menyatakan jumlah maksimum vektor-vektor baris/kolom yang bebas linier

♥Untuk mencari rank dari suatu matriks dapat digunakan transformasi elementer. Dengan mengubah sebanyak mungkin baris/kolom menjadi vektor nol (karena vektor nol adalah bergantung linier).

♥ **Petunjuk menentukan Rank (Baris/Kolom):**

1. **Tentukan elemen Pivot (pada baris/kolom), untuk mempermudah pilih elemen 1 atau –1**
2. **Jadikan nol semua elemen yang sekolom/sebaris dengan pivot tersebut.**
3. **Sekarang kita perlu perhatikan lagi baris /kolom yang tertinggal (tanpa baris atau kolom yang terdapat pivot):**

apabila tinggal dua baris /kolom yang tersisa maka tinggal diperiksa apakah baris/kolom tersebut kelipatan jika ya maka salah satu baris /kolom tersebut dapat dijadikan nol.jika tidak langkah selesai

apabila masih lebih dari dua baris/kolom lakukan lagi langkah 1 di atas sampai langkah 3.1.

Contoh : tentukan Rank dari matriks A berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Dengan menentukan Rank Baris

1. Pilih Pivot pada baris satu kolom satu, yaitu elemen =1
2. Dengan mengunakan transformasi elementer baris $H_{21}^{(-2)}$ (A); $H_{31}^{(-1)}$ (A); $H_{41}^{(-1)}$ (A) diperoleh matriks

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

3.2 Karena masih tersisa matrik ukuran (3x3) $\Longrightarrow$ (tanpa baris satu kolom satu atau baris dan kolom yang mengandung piviot) maka kita harus temukan pivot kembali dan ulangi langkah 1 sampai 3.1.

1. Plih pivot pada elemen baris 2 kolom 2 (misalnya karena elemen baris 3 kolom 3 atau baris 4 kolom 2 dapat juga di jadikan pivot)
2. Gunakan transformasi elementer baris $H_{32}^{(2)}$ (B); $H_{42}^{(1)}$ (B) sehingga diperoleh matriks

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & -11 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \Longleftarrow \\ \Longleftarrow \end{matrix}$$

3.1. Baris 3 dan 4 berkelipatan maka dengan transformasi elementer baris $H_{43}^{(-1)}$ (C);sehingga diperoleh matriks :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rank Baris matriks A = 3 (banyaknya baris yang bukan baris nol)

Dengan Cara yang hampir sama dapat digunakan secara kolom.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Pilih pivot pada baris 1 kolom 1
2. Dengan transformasi $k_{21}^{(-2)}$ (A); $K_{31}^{(-3)}$ (A); $H_{41}^{(-1)}$ (A) diperoleh matriks :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Pilih pivot baris 2 kolom 2 (misal ,karena dapat juga elemen baris 3 kolom 3 atau baris 4 kolom 2)
2. Gunakan transformasi kolom $k_{32}^{(-5)}$ (B); $K_{42}^{(2)}$ (B);
   Sehingga diperoleh matriks :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -11 & 6 \\ 1 & 1 & -11 & 6 \end{pmatrix}$$

3.1. kolom 3 dan 4 berkelipatan maka dengan transformasi kolom $K_{43}^{(6/11)}(C)$; Sehinga diperoleh matriks :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -11 & 0 \\ 1 & 1 & -11 & 0 \end{pmatrix}$$

Rank Kolom matriks A = 3 (banyaknya kolom yang bukan kolom nol)

Kesimpulan : Rank Baris = Rank kolom.

Catatan :

Rank Baris = Rank kolom maka kita dapat mencari rank suatu matrik dengan menentukan mana ukuran yang kecil baris atau kolom, sehingga langkah penyelesaiannya lebih cepat.