7

TRANSPORTASI LINIER

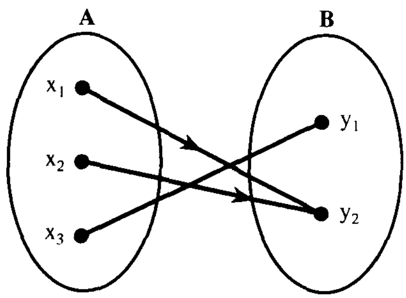
7.1. PENGERTIAN TRANSFORMASI

Pandang 2 buah himpunan A dan B. Kemudian dengan suatu aturan/cara tertentu f, kita mengaitkan (menggandengkan, mengkawankan) setiap $x \in A$ dengan satu dan hanya satu $y \in B$. Dikatakan : terdapat suatu fungsi $f : A \to B$.

Contoh (7.1) :

Misalkan $A = \{x_1, x_2, x_3\}$,

$B = \{y_1, y_2\}$

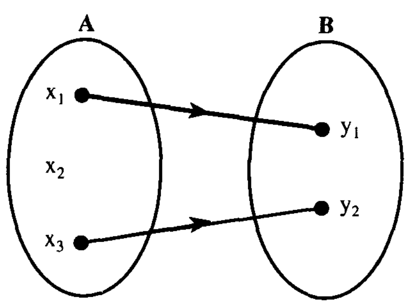


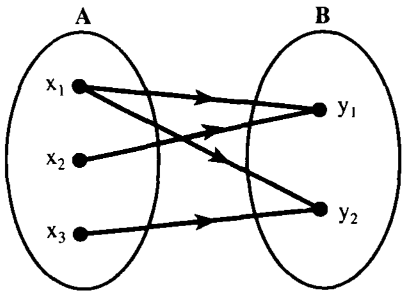
$$x_1 \xrightarrow{f} y_2$$
$$x_2 \xrightarrow{f} y_2$$
$$x_3 \xrightarrow{f} y_1$$

Terlihat bahwa setiap $x \in A$ mempunyai satu pasangan $y \in B$. Jadi f adalah fungsi $A \to B$.

Contoh (7.2) :

Terlihat bahwa tidak semua $x \in A$, mempunyai pasangan, di sini x_2 tidak mempunyai pasangan. Jadi bukan fungsi.





Terlihat bahwa terdapat $x \in A$, di sini x_1 mempunyai lebih dari satu pasangan, yaitu y_1 dan $y_2 \in B$. Jadi juga bukan fungsi.

Catatan (1) :

Apabila himpunan A dan B di atas merupakan himpunan bilangan riil R^1 (atau kompleks C^1) atau himpunan bagiannya, cara/aturan pengaitan umumnya dapat dirumuskan dalam suatu hubungan matematis. Hal ini sudah cukup kita kenal dalam pelajaran-pelajaran Matematik sebelum ini.

Catatan (2) :

Fungsi $f : R^1 \rightarrow R^1$ dimana setiap $x \in R^1$ dikaitkan dengan kuadratnya $\in R^1$ atau $x \in x^2$ atau $f(x) = x^2$ untuk setiap x bilangan riil. (Atau pula $y = x^2$).

Catatan (3) :

Himpunan A di atas disebut DOMAIN dan himpunan B disebut CODOMAIN dari fungsi f tersebut.

Yang menjadi pokok pembicaraan kita di dalam bab ini adalah fungsi-fungsi dimana domain dan codomainnya merupakan ruang vektor, pada khususnya adalah R^n, ruang vektor yang anggota-anggotanya n-tupel berurutan bilangan riil (tetapi sedikit-sedikit disinggung pula C^n atau ruang vektor lain). Untuk ini, kita memilih menggunakan perkataan "TRANSFORMASI" ("MAPPING", "PEMETAAN") sebagai pengganti perkataan fungsi :

Contoh (7.3) :

Diketahui suatu transformasi T : $R^3 \rightarrow R^3$ dengan rumus transformasi $T[x_1, x_2, x_3] = [2x_1-x_2, x_2+x_3, x_3^2]$, untuk setiap $x = [x_1, x_2, x_3] \in R^3$. Vektor [2, 1, −1] akan ditransformasikan oleh T menjadi : $T[2, 1, -1] = [2.2-1, 1-1, (-1)^2] = [3, 0, 1]$.

Kita katakan : vektor [3, 0, 1] adalah *peta* dari vektor [2, 1, −1], sebaliknya : vektor [2, 1, −1] adalah *prapeta* dari vektor [3, 0, 1].

Contoh lain : T[1, 0, 0] = [2, 0, 0]
T[4, −1, 7] = [9, 6, 49) dan lain-lain.

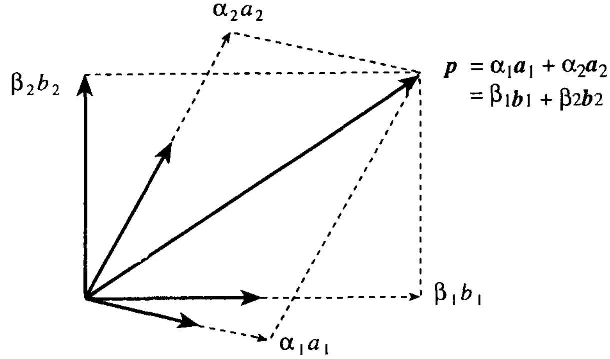
7.2. PERGANTIAN BASIS

Salah satu transformasi vektor yang penting adalah transformasi sebagai akibat pergantian basis dari ruang vektor tersebut. Sehingga dalam hal ini, sebenarnya vektor adalah tetap tetapi cara menyatakannya yang berubah.

Catatan (3) :

Kita pandang misalnya R^2.

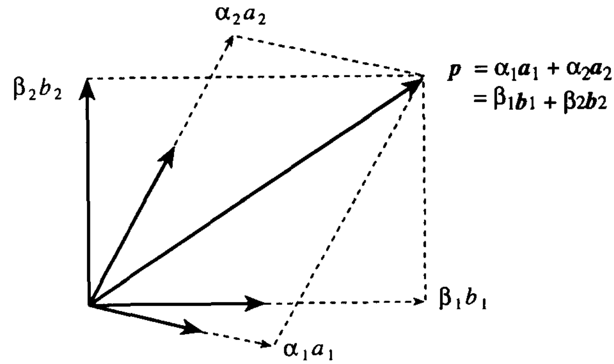
Setiap 2 vektor yang bebas linier selalu dapat dijadikan basis. Vektor-vektor yang membentuk suatu basis disebut vektor-vektor basis dari basis tersebut. Setiap vektor $\in R^2$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor basis.



Misalkan $p \in R^2$, terhadap basis $\{a_1, a_2\}$ adalah $p = \alpha_1 a_1 + \alpha_1 a_2$, sedang terhadap basis lain $\{b_1, b_2\}$ adalah $p = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$.

Kita katakan : Koordinat b adalah $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ relatif terhadap basis $(a_1, a_2\}$

dan $\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ relatif terhadap basis $\{b_1, b_2\}$.



(Boleh saja kalau kita menginginkan menulis koordinat tersebut secara baris : $[\alpha_1, \alpha_2]$, $[\beta_1, \beta_2]$. Tetapi dalam pembicaraan mengenai transformasi linier dan analisis matriks lebih lanjut, penulisan vektor secara kolom lebih memudahkan pembahasan).

Secara abstrak dapat dirasakan bahwa terdapat suatu transformasi $R^2 \to R^2$ sebagai akibat perubahan basis $\{a_1, a_2\}$ menjadi $\{b_1, b_2\}$, dimana salah satunya adalah

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

Catatan (4) :

Selama ini kita selalu menggunakan basis dasar yang disebut basis natural, disingkat basis $\{e_i\}$, dengan vektor-vektor basis :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Untuk R^n, basis naturalnya terdiri atas n vektor-vektor :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}, \; e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \; , \ldots , \; e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektor-vektor tersebut saling tegak lurus dan masing-masing panjangnya = 1 satuan, disebut juga basis orthogonal. Di dalam Ilmu Ukur Analitik kita kenal sebagai basis dari susunan koordinat Cartesian.

Contoh (7.4) :

Koordinat vektor $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ relatif terhadap basis $\{e_i\}$

Kalau dilakukan pergantian basis ke basis $\{f_i\}$:

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

maka berlaku : $4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

diperoleh $\left.\begin{matrix} 4 = a \\ 5 = a + 2b \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} a = 4 \\ b = {}^1/_2 \end{matrix}\right\}$

artinya $\begin{bmatrix} 4 \\ {}^1/_2 \end{bmatrix}$ adalah koordinat vektor v relatif terhadap $\{f_i\}$.

DEFINISI:

Misalkan $\{e_i\}$ adalah basis natural dan $\{f_i\}$ basis yang lain dari R^n dimana berlaku hubungan :

$f_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots + a_{1n}e_n$
$f_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{2n}e_n, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$f_n = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n$

$$(f_1 \mid f_2 \mid \ldots \mid f_n) = (e_1 \mid e_2 \mid \ldots \mid e_n) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriks P} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ . & . & \ldots. & . \\ . & . & \ldots. & . \\ . & . & \ldots. & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks TRANSISI dari pergantian basis lama $\{e_i\}$ menjadi basis baru $\{f_i\}$.

Ditulis pula $P = P^f{}_e$.

Jelas karena $\{f_i\}$ basis, maka bebas linier sehingga matriks P mempunyai invers, $P^{-1} = Q$, berarti :

$(e_1 \mid e_2 \mid \ldots \mid e_n) = (f_1 \mid f_2 \mid \ldots \mid f_n)\, Q$, sehingga Q merupakan matriks transisi dari pergantian basis lama $\{f_i\}$ menjadi basis baru $\{e_i\}$.

Contoh (7.5) :

Pandang dua buah basis R^3 : $\{e_i\}$
dan $\{f_i\}$ dengan vektor basis :

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hubungannya :

$f_1 = 1e_1 + 1e_2 + 2e_3$
$f_2 = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3$
$f_3 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3$

$$\text{Jadi P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sedangkan :
$$\begin{aligned} e_1 &= 0f_1 + 0f_2 + 1f_3 \\ e_2 &= 0f_1 + f_2 - f_3 \\ e_3 &= {}^1/_2 f_1 - {}^1/_2 f_2 + 0f_3 \end{aligned}$$

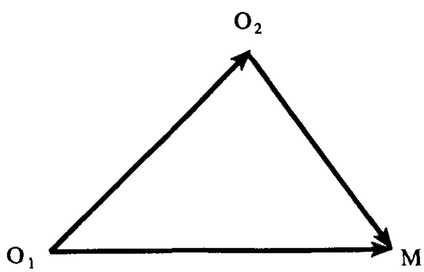
$$\text{Jadi Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & {}^1/_2 \\ 0 & 1 & -{}^1/_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mudah diselidiki bahwa $Q = P^{-1}$

Teorema (1) :

Jika M suatu titik di R^n berkoordinat $(x_1, x_2, ..., x_n)$ relatif terhadap basis lama $\{e_i\}$ dan berkoordinat $(y_1, y_2, ..., y_n)$ relatif terhadap basis baru $\{f_i\}$ yang titik awal (nol)-nya adalah titik $0_2(c_1, c_2, ..., c_n)$, maka berlaku :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$$, dimana P adalah matriks transisi



Bukti :

$$O_1M = O_1O_2 + O_2M = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$$
$$= c_1e_1 + c_2e_2 + ... + c_ne_n + y_1f_1 + y_2f_2 + ... + y_nf_n$$

Secara matriks :

$$(e_1 \mid e_2 \mid ... \mid e_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = (e_1 \mid e_2 \mid ... \mid e_n) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{bmatrix} + (f_1 \mid f_2 \mid ... \mid f_n) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$$

Kalau P matriks transisi berarti $(e_1 \mid e_2 \mid ... \mid e_n)\, P = (f_1 \mid f_2 \mid . . . f_n)$.

Sehingga :

$$(e_1 \mid e_2 \mid \ldots \mid e_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = (e_1 \mid e_2 \mid \ldots \mid e_n)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{bmatrix} + (e_1 \mid e_2 \mid \ldots \mid e_n)P\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{bmatrix} + P\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$$

Contoh (7.6) :

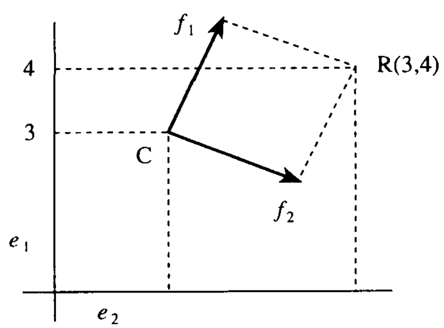
Diketahui suatu susunan koordinat Cartesian di R^2. Dibuat susunan koordinat baru dengan vektor-vektor basis $f_1 = [1, 2]$, $f_2 = [2, -1]$ dengan titik awal yang baru adalah titik C(2, 3). Tentukan matriks transisi P. Titik R berkoordinat (5, 4), berapa koordinat relatif terhadap $\{f_i\}$?

Jawab :

Koordinat Cartesian mempunyai basis natural $e_1 = [1, 0]$
$e_2 = [0, 1]$

$f_1 = [1, 2] = 1e_1 + 2e_2$
$f_2 = [2, -1] = 2e_1 - 1e_2$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$



Titik R(5, 4) :

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} y_1 + 2y_2 = 3 \\ 2y_1 - y_2 = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} y_1 = 1 \\ y2 = 1 \end{matrix}$$

Jadi koordinat R relatif terhadap basis $\{f_1\}$ adalah (1, 1).

Teorema (2) :

Vektor v berkoordinat $[x_1, x_2, ..., x_n]$ relatif terhadap basis $\{e_i\}$ $[y_1, y_2, ..., y_n]$ relatif terhadap basis baru $\{f_i\}$, maka berlaku :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

dimana P adalah matriks transisi pergantian basis dari $\{e_i\}$ ke $\{f_i\}$atau secara singkat kita tulis :

$v_e = Pv_f \rightarrow v_f = P^{-1}v_e$

Bukti :

Caranya sama seperti bukti Teorema (1), hanya perubahan titik awal susunan baru tidak membawa pengaruh apa-apa, karena di sini kita berbicara mengenai vektor, tetapi sama apabila kita pindahkan sejajar.

Contoh (7.7) :

Kalau pada contoh (7.6) di atas diketahui vektor v = [4, 3] relatif terhadap basis

$\{e_i\}$, maka terhadap basis $\{f_i\}$:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} y_1 + 2y_2 = 4 \\ 2y_1 - y_2 = 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} y_1 = 2 \\ y_2 = 1 \end{matrix}$$

atau : $v_f = [2, 1]$

Catatan (5) :

Uraian di atas berlaku pula untuk pergantian basis ruang vektor yang lain. Juga tidak untuk basis natural saja.

7.3. TRANSFORMASI VEKTOR LINIER

DEFINISI :

$T : V \rightarrow W$ suatu transformasi dari ruang vektor V ke ruang vektor W. Transformasi T disebut transformasi vektor linier bila terpenuhi :

(i) Untuk setiap $v_1, v_2 \in V$ $T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2)$, dan

(ii) Untuk setiap $v \in V$ dan λ skalar berlaku $\lambda T(v) = T(\lambda v)$.

Contoh (7.8) :

Diketahui $T : R^3 \rightarrow R^3$ dimana :

$T'[x_1, x_2, x_3] = [2x_1+x_2, x_2, x_3+1]$ untuk setiap $[x_1, x_2, x_3] \in R^3$.

T adalah transformasi vektor yang tidak linier karena syarat (i), misalnya tak terpenuhi. Ambil $v_1 = [1, 0, 0]$, $v_2 = [1, 0, 1]$ maka $T(v_1) + T(v_2) = [2, 0, 1] + [2, 0, 2] = [4, 0, 3]$, sedang $T(v_1+v_2) = T[2, 0, 1] = [4, 0, 2]$.

Jadi $T(v_1) + T(v_2) \neq T(v_1+v_2)$.

7.4. MATRIKS DAN TRANSFORMASI VEKTOR LINIER

Pandang $T : R^n \rightarrow R^m$ suatu transformasi vektor linier.

$\{e_i\}$, $i = 1, 2, ..., n$, basis natural dari R^n

$\{\varepsilon_i\}$, $i = 1, 2, ..., m$, basis natural dari R^m

$T(e_1), T(e_2), ..., T(e_n)$ adalah vektor-vektor di R_m, sehingga merupakan kombinasi linier dari $\{\varepsilon_i\}$

Misalnya :

$$\begin{aligned} T(e_1) &= a_{11}\,\varepsilon_1 + a_{21}\,\varepsilon_2 + ... + a_{m1}\,\varepsilon_m \\ T(e_2) &= a_{12}\,\varepsilon_1 + a_{22}\,\varepsilon_2 + ... + a_{m2}\,\varepsilon_m \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (*) \\ T(e_n) &= a_{1n}\,\varepsilon_1 + a_{2n}\,\varepsilon_2 + ... + a_{mn}\,\varepsilon_m \end{aligned}$$

DEFINISI:

Transpose dari matriks koefisien di atas :

$$[T]_e \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{berukuran (mxn);}$$

disebut MATRIKS REPRESENTASI dari transformasi linier T, singkatnya matriks transformasi dari T, relatif terhadap basis-basis natural $\{e_i\}$ dan $\{\varepsilon_i\}$.

Catatan (6) :

Kalau kita tulis secara kolom (*) di atas menjadi :

$$[T(e_1 \mid T(e_2 \mid \dots \mid T(e_n)] = [\varepsilon_1 \mid \varepsilon_2 \mid \dots \mid \varepsilon_m] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= 1[T]_e = [T]_e$$

Jadi kolom-kolom dari matriks transformasi merupakan peta dari vektor-vektor basis. Mencari matriks transformasi tak lain daripada mencari peta dari vektor basis. Matriks transformasi ini secara lengkap menentukan transformasi tersebut.

Teorema (3) :

Bila $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix}$ vektor (kolom) $\in R^n$, dan $T : R^n \to R^m$, suatu transformasi

linier dengan $[T]_e$ matriks transformasi relatif terhadap basis natural (ditulis secara kolom) maka berlaku :

$$w = T(v) = T \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix} = [T]_e v$$

Bukti :

$$T \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} + \dots \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$= v_1 T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + v_n T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= v_1T(e_1) + v_2T(e_2) + \ldots + v_nT(e_n)$$

$$= [T(e_1) \mid T(e_2) \mid \ldots \mid T(e_n)] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$= [T]_e v \text{ (terbukti).}$$

Contoh (7.9) :

$T : R^3 \rightarrow R^3$ suatu transformasi linier dimana $T[x_1, x_2, x_3] = [x_1, 2x_2, x_1+x_3]$. Mencari matriks transformasi tak lain daripada mencari peta dari vektor-vektor basis. (Bila tak disebut apa-apa selalu dimaksudkan relatif terhadap basis natural).

$T(e_1) = T[1, 0, 0] = [1, 0, 1] = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3$

$T(e_2) = T[0, 1, 0] = [0, 2, 0] = 0e_1 + 2e_2 + 0e_3$

$T(e_3) = T[0, 0; 1] = [0, 0, 1] = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3$

$$[T]^e_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Peta dari [2, 3, 1] : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$, atau : [2, 6, 3].

Catatan (7) :

Suatu sifat transformasi linier yang penting adalah bahwa suatu transformasi linier ditentukan (tertentu) secara natural tunggal oleh peta dari vektor-vektor basis. Jadi jika peta dari vektor-vektor basis diketahui maka peta dari sebarang vektor yang lain dapat ditentukan.

Contoh (7.10) :

$T : R^2 \to R^2$ dimana diketahui :

$[2.1] \xrightarrow{T} [5, -2]$

$[-1, 1] \xrightarrow{T} [-1, 1]$

maka untuk menentukan transformasi T tersebut kita mencari matriks transformasi, kita tulis :

$$\begin{array}{lll} T[2, 1] = [5, -2] \to & 2T[1, 0] + 1T[0, 1] = [5, -2] \;.... (^{**}) \\ T[-1, 1] = [-1, 1] \to & -1T[1, 0] + 1T[0, 1] = [-1, 1] \\ \hline & 3T[1, 0] = [6, -3] & - \end{array}$$

Jadi $T[1, 0] = [2, -1]$, dan dari (**) diperoleh $T[0, 1] = [1, 0]$

Jadi matriks $[T]^e{}_e = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

dan rumus transformasinya :

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [T]^e{}_e \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}$$

atau : $T[x_1, x_2] = [2x_1+x_2, -x_1]$.

7.5. RUANG PETA DAN RUANG NOL

$T : R^n \to R^m$ suatu transformasi linier, belum tentu semua vektor di R^m menjadi peta dari vektor di R^n.

Contoh (8.11) :

$T : R^2 \to R^3$ dimana $T[x_1, x_2] = [x_2, 0, x_1]$.

Maka vektor $[1, 1, 1] \in R^3$ bukan peta dari vektor manapun di R^2. Kalau terjadi demikian, kita katakan transformasi tersebut *tidak onto*.

DEFINISI :

$T : R^n \to R^m$ suatu transformasi linier, maka $\mathrm{Im}(T) = \{w \mid w = T(v),\ v \in R^n\}$, suatu himpunan bagian dari R^m, disebut RUANG PETA (IMAGE) dari transformasi linier T.

Ternyata bahwa Im(T) adalah suatu ruang vektor bagian dari R^m.

Catatan (8) :

Dapat terjadi bahwa 2 vektor atau lebih mempunyai peta yang sama. Bila terjadi demikian, kita katakan bahwa transformasi tersebut "tidak satu-satu (one-one)".

Contoh (7.12) :

$T : R^2 \to R^2$ dimana $T[x_1, x_2] = [x_1+2x_2,\ 2x_1+4x_2]$,

$$\text{terlihat bahwa}\quad \begin{aligned} T[0, 0] &= [0, 0] \\ T[2, -1] &= [0, 0] \\ T[-8, 4] &= [0, 0] \end{aligned}$$

dan lain-lain vektor lagi yang mempunyai peta [0, 0].
Jadi T tidak one-one.

DEFINISI :

$T : R^n \to R^m$ suatu transformasi linier, maka $\mathrm{Ker}(T) = \{v \mid v \in R^n,\ T(v) = 0\}$, suatu himpunan bagian dari R^n, disebut RUANG NOL (KERNEL) dari transformasi linier T.

Ternyata bahwa Ker(T) adalah suatu ruang vektor bagian dari R^n.

Catatan (9) :

Dibedakan antara ruang nol dengan ruang berdimensi nol (yaitu ruang vektor yang anggotanya hanya vektor nol 0).

Anggota ruang nol, selain 0, mungkin juga vektor $\neq 0$.

Bukti :

bahkan Im(T) dan Ker(T) ruang vektor :

(*) – $0 \in$ Im(T) karena T0) = 0, jadi Im(T) $\neq \emptyset$.

– Bila $w_1, w_2 \in$ Im(t) maka ada $v_1, v_2 \in R^n$ sehingga $T(v_1) = w_1$ dan $T(v_2) = w_2$, Jadi : $w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2)$. Berarti $(w_1 + w_2) \in$ Im(T).

– λ skalar, dan $w \in$ Im(T) maka ada $v \in R^n$ sehingga $T(v) = w$, Jadi $\lambda w = \lambda T(v) = T(\lambda v)$. Berarti $(\lambda w) \in$ Im(T).

Im(t) ruang vektor bagian dari R^m.

(**)– $T(0) = 0$, berarti $0 \in$ Ker(T). Jadi Ker(T) $\neq \emptyset$.

Bila $v_1, v_2 \in$ Ker(T). Maka $T(v_1) = T(v_2) = 0$.

$T(v_1+v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0$. Jadi $(v_1+v_2) \in$ Ker(T).

– Bila λ skalar, dan $v \in$ Ker(T) yang berarti $T(v) = 0$ maka $T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda 0 = 0$. Jadi $(\lambda v) \in$ Ker(T).

Ker(T) ruang vektor bagian dari R^n.

Catatan (10) :

Kalau $T : R^n \rightarrow R^n$ mempunyai matriks transformasi A (matriks bujur sangkar) yang singular, T dikatakan transformasi yang singular. Kalau A singular, transformasi dikatakan nonsingular.

Catatan (11) :

Kalau A adalah matriks transformasi dari T, maka dimensi IM(T) = rank(A). Hal ini jelas karena kolom-kolom dari A adalah $T(e_1)$, $T(e_2$, ..., $T(e_n)$ yang membentuk ruang kolom dari A. Dengan perkataan lain :

$\text{Im}(T) = L\{T(e_1), T(e_2), ..., T(e_n)\}$, berarti dimensi Im(T) = dimensi $L\{T(e_1), T(e_2), ..., T(e_n)\}$ = rank(A).

Catatan (12) :

Dimensi Ker(T) = n – rank(A).

Mudah dilihat bahwa bila $v \in$ Ker(T) maka $T(v) = Av = 0$.

Susunan persamaan linier homogen $Av = 0$ mempunyai ruang jawab yang berdimensi $n - \text{rank}(A)$, (lihat kembali Bab VI). Dengan perkataan lain: mencari Ker(T) tak lain daripada mencari jawab susunan persamaan linier homogen $Av = 0$.

Contoh (7.13) :

Diketahui $T : R^3 \to R^3$ dimana :

$T[x, y, z] = [x+2y+z,\ 2x+3z,\ 3x+2y+4z]$

Tentukan basis dan dimensi ruang peta dan ruang nol!

Kita tentukan dulu matriks transformasi A :

$T[1, 0, 0] = [1, 2, 3]$

$T[0, 1, 0] = [2, 0, 2]$

$T[0, 0, 1] = [1, 3, 4]$

$$A = [T]^e_e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Rank matriks A (secara kolom) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \underset{K_{31}^{(-1)}}{\overset{K_{21}^{(-2)}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \overset{K_{23}^{(4)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

adalah = 2. Jadi dimensi Im(T) = 2 dan basisnya dapat diambil $\{[1, 2, 3], [0, 1, 1]\}$.

T di atas adalah transformasi yang singular.

Untuk mencari Ker(T) :

Misalkan $v = [v_1, v_2, v_3] \in$ Ker(T), maka $Av = 0$ atau :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$, dimensi $\text{Ker}(T) = n - \text{rank}(A) = 3 - 2 = 1$.

Kita menghitung jawab susunan persamaan linier homogen di atas : cukup diambil 2 persamaan yang bebas :

$$\left.\begin{aligned} v_1 + 2v_2 + v_3 &= 0 \\ 2v_1 + 0v_2 + 3v_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Ambil 1 parameter, misalnya $v_2 = \lambda$, maka $v_1 = -6\lambda$, $v_3 = 4\lambda$.

Jadi $v = \lambda[-6, 1, 4]$; Ker(T) mempunyai basis (–6, 1, 4)

Atau Ker(T) = L{[–6, 1, 4]}.

7.6. PRODUK TRANSFORMASI

Pandang 2 buah transformasi linier :

$$\begin{aligned} T &: V^n \to W^r \\ S &: W^r \to U^m \end{aligned}$$

dengan matriks transformasi berturut-turut A dan B.
(dimensi $V^n = n$, dimensi $W^r = r$, dimensi $U^m = m$)

Setiap vektor $v \in V^n$ oleh transformasi T dipetakan menjadi $w = Av$, kemudian hasilnya $w \in W^r$ oleh transformasi S dipetakan menjadi $u = Bw = B(Av) = (BA)v$.

$$\underbrace{v \in V^n \xrightarrow{T} w \in W^r \xrightarrow{T} u}_{ST} \in U^m$$

$v \to u$ dapat dipandang sebagai suatu transformasi baru ST, dengan matriks transformasi BA.

ST disebut produk transformasi dari S dan T.

Contoh (7.14) :

T : $R^3 \to R^3$ dengan $T[x_1, x_2, x_3] = [2x_2+x_3, 3x_1+x_2+x_3, x_2]$ dan

R : $R^3 \to R^3$ dengan $S[x_1, x_2, x_3] = [2x_1+x_2+x_3, x_1+x_3, 2x_1+x_2+2x_3]$

Maka produk transformasi ST mempunyai rumus :

$(ST)[x_1, x_2, x_3] = S(T[x_1, x_2, x_3] = S[2x_1+x_3, 3x_1+x_2+x_3, x_2] = [2(2x_2+x_3)+1(3x_1+x_2+x_3)+1(x_2), 1(2x_2+x_3)+1(x_2), 2(2x_2+x_3)+1(3x_1+x_2+x_3)+2(x_2)]$
$= [3x_1+6x_2+3x_3, 3x_2+x_3, 3x_1+7x_2+3x_3]$

dan matriks transformasinya,

$$[ST]^e_e = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Jelas $[S]^e_e = B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$[T]^e_e = A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

dan $[ST]^e_e = [S]^e_e[T]^e_e = BA$.

Peta dari vektor $v = [1, 0, 2]$ adalah $ST[1, 0, 2] = [9, 2, 9]$.

7.7. TRANSFORMASI INVERS

Pandang $T : V^n \to V^n$ suatu transformasi linier pada v^n, ruang vektor berdimensi n. A matriks transformasi dari T.

Maka $v \in V^n$ dipetakan menjadi $w = Av \in V^n$. Kalau rank(A) = n maka jawab persamaan $w = Av$ adalah tunggal (unik); berarti setiap w merupakan peta dari hanya satu v, dengan perkataan lain: tidak ada vektor $\in V^n$ mempunyai peta yang sama, sehingga transformasi T adalah one-one dan onto.

Pandang sekarang $S : V^n \to V^n$ dengan matriks transformasi B sedemikian sehingga untuk v dan w di atas berlaku $v = Bw$. Kalau kita lihat produk transformasi ST (dengan matriks transformasi BA) maka $(BA)v = B(Av) = Bw = v = Iv$, I matriks identitas.

$v \in V^n \to w \in V^n$

Juga produk transformasi TS (dengan matriks transformasi AB) memenuhi (AB)w = A(BW) = Av = w = Iw. *Karena berlaku untuk setiap vektor* $\in V^n$ *maka* $BA = AB = I$.

DEFINISI :

Transformasi linier $V^n \rightarrow V^n$ dengan matriks transformasinya matriks identitas I, disebut transformasi identitas, berlaku Iv = v, untuk setiap $v \in V^n$.

DEFINISI :

Bila A dan B matriks-matriks transformasi dari trasformasi-transformasi linier T dan S, dimana berlaku BA = AB = I, maka dikatakan: S adalah transformasi invers dari T dan sebaliknya; ditulis $S = T^{-1}$ atau $T = S^{-1}$, dan matriks $B = A^{-1}$ atau $A = B^{-1}$.

Catatan (13) :

Suatu transformasi $V^n \rightarrow V^n$, hanya mempunyai invers bila matriks transformasinya mempunyai invers (bila matriks nonsingular, determinannya $\neq 0$).

Contoh (7.15) :

Vektor w = [3, 1, 0] adalah peta dari v oleh transformasi T dengan matriks transformasi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari v, dapat kita cari dahulu transformasi invers T^{-1} dengan matriks transformasi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi } v = a^{-1}w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

7.8. TRANSFORMASI SIMILARITAS

Misalkan selain melakukan transformasi vektor T : $V^n \rightarrow W^n$ kita juga melakukan pergantian basis.

Perhatikan gambar berikut :

$$\begin{tikzcd}
v_e \in V^n \arrow[rr, "{[T]^{\varepsilon}_{e}}"] \arrow[d, "P^f_e = P"'] & & w \in W^m \arrow[d, "P^f_e = P"] \\
v_f \in V^n \arrow[rr, "{[T]^{\sigma}_{f}}"'] & & w \in W^m
\end{tikzcd}$$

Dimana :

$w\varepsilon = [T]^{\varepsilon}_{e}\, v_e$

$W\sigma = [T]^{\sigma}_{f}\, v_f$

$v_f = [P^f_e]^{-1} v_e$

$w\sigma = [P^{\sigma}_{\varepsilon}]^{-1} w_{\varepsilon}$

v_e = vektor v relatif terhadap basis $\{e_i\}$

v_f = koordinat vektor v relatif terhadap basis $\{f_i\}$

w_{ε} = koordinat vektor w, peta dari v, relatif terhadap basis $\{\varepsilon_i\}$

w_{σ} = koordinat vektor w, peta dari v, relatif terhadap basis $\{\sigma_i\}$

P^f_e = matriks transisi basis lama $\{e_i\}$ ke basis baru $\{f_i\}$

P^{σ}_{ε} = matriks transisi basis lama $\{\varepsilon_i\}$ ke basis baru $\{\sigma_i\}$

$[T]^{\varepsilon}_{e}$ = matriks transformasi relatif terhadap basis $\{e_i\}$ dan $\{\varepsilon_i\}$ (basis-basis natural}

$[T]^{\sigma}_{f}$ = matriks transformasi relatif terhadap basis $\{f_i\}$ dan $\{\sigma_i\}$ (basis-basis baru}

Catatan (13) :

$w_\sigma = [T]^\sigma_f\, v_f = [T]^\sigma_f (P^f_e)^{-1} v_e$

$w_\sigma = (P^\sigma_\varepsilon)^{-1} w_\varepsilon = (P^\sigma_\varepsilon)^{-1} [T]^\varepsilon_e\, v_e$ karena berlaku untuk setiap v_e

maka $[T]^\sigma_f (P^f_e)^{-1} [T]^\varepsilon_e (P^f_e)$.

Kalau transformasi $T : V^n \to V^n$, dengan melakukan pergantian basis $\{e_i\}$ ke $\{f_i\}$, menjadi :

$$\begin{tikzcd}
v_e \in V^n \arrow[rr, "{[T]^e_e}"] \arrow[d, "P^f_e = P"'] & & w_e \in V^n \arrow[d, "P^f_e = P"] \\
v_f \in V^m \arrow[rr, "{[T]^f_f}"'] & & w_f \in V^m
\end{tikzcd}$$

Hubungan menjadi : $[T]^f_f = P^{-1}[T]^e_e\, P$.

Contoh (7.16) :

$T : R^2 \to R^2$ dimana $T[x, y] = [x+y, x-y]$. Bila dilakukan pergantian basis R^2 menjadi $\{[1, 2], [2, 3]\}$, tentukan matriks transformasi sesudah pergantian basis dan peta vektor [13, 2] sebelum dan sesudah pergantian basis.

$T[1, 0] = [1, 1]$

$T[0, 1] = [1, -1]$

$$[T]^e_e = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$f_1 = [1, 2] = 1e_1 + 2e_2$

$f_2 = [2, 3] = 2e_1 + 3e_2$

matriks transisi $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Maka $[T]^f_f = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -11 & -17 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$$

Peta dari v = [13, 2] sebelum pergantian basis adalah

$$w_e = [T]_e v_e = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Sesudah pergantian basis :

$$w_f = P^{-1} w_e = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 \\ 19 \end{bmatrix}$$

atau boleh juga

$$w_f = [T]^f_f\ v_f = [T]^f_f p^{-1} v_e = \begin{bmatrix} -1 & -17 \\ 7 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ \end{bmatrix}$$

DEFINISI :

A dan B, matriks-matriks bujur sangkar berordo n. Apabila terhadap matriks bujur sangkar P yang nonsingular berordo n sedemikian sehingga $B = P^{-1}AP$, maka dikatakan bahwa matriks B similar terhadap matriks A, atau matriks B didapatkan dari A dengan suatu transformasi similaritas.

Catatan (15) :

Similaritas merupakan relasi yang ekivalen, dimana terpenuhi :

(i) A similar A, karena $A = I^{-1} AI$.

(ii) Bila B similar A maka A similar B, karena :
$B = P^{-1}AP \rightarrow PBP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} \rightarrow PBP^{-1} = Q^{-1}BQ$
dimana $Q = P^{-1}$

(iii) Bila B similar A, C similar B maka C similar A, karena

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}AP \\ C &= Q^{-1}BQ \rightarrow C = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q \\ &= (PQ)^{-1}A(PQ) \\ & R^{-1}AR, \text{ dimana } R = PQ. \end{aligned}$$

Catatan (16) :

Kalau A dan B similar dan merupakan matriks transformasi, maka A dan B mewakili suatu transformasi yang sama, hal mana mudah dijelaskan dari Catatan (14), mereka masing-masing relatif terhadap basis yang berbeda, dan matriks P merupakan mariks transisi kedua basis tersebut.

7.9. AKAR DAN VEKTOR KARAKTERISTIK (EIGENVALUE DAN EIGENVEKTOR)

DEFINISI :

A suatu matriks bujur sangkar. λ skalar yang memenuhi persamaan (*) : $Av = \lambda v$, untuk suatu vektor kolom $v \neq 0$, maka dikatakan : λ adalah suatu akar karakteristik dari A, dan v yang memenuhi persamaan (*) itu disebut vektor karakteristik yang bersangkutan dengan λ.

Contoh (7.17) :

Hitunglah akar karakteristik dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Misalkan λ skalar dan $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ vektor yang memenuhi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(*) \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

suatu susunan persamaan linier homogen, kita inginkan jawab nontrivial $v \neq 0$.

jadi rank

$$\text{rank}\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} < 2$$

atau det $\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$

(persamaan ini disebut persamaan karakteristik).

atau $(1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 = 0$
$\rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$

Untuk mencari vektor karakteristik yang bersangkutan, kita masukkan harga λ ke (*) :

Untuk $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{bmatrix} 1-4 & 2 \\ 3 & 2-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

atau : $\left.\begin{aligned} -3v_1 + 2v_2 &= 0 \\ 3v_1 - 2v_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$ Cukup diambil 1 persamaan :

$-3v_1 + 2v_2 = 0$, pilih $(2 - 1) = 1$ parameter

Misalnya $v_1 = 2\mu \rightarrow v_2 = 3\mu = -1$, jadi $v = \mu \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

adalah vektor-vektor karakteristik yang bersangkutan dengan $\lambda = 4$. Dengan cara yang sama untuk $\mu_2 = -1$, diperoleh persamaan :

$2v_1 + 2v_2 = 0 \rightarrow v = \mu \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Catatan (17) :

Vektor-vektor karakteristik yang bersangkutan dengan suatu akar karakteristik tertentu, membentuk suatu ruang vektor yang kita sebut EIGENSPACE. Silahkan untuk dibuktikan.

Catatan (18) :

Kalau matriks bujur sangkar A di atas merupakan matriks transformasi dari transformasi linier T, maka kita dapat mengatakan akar dan vektor karakteristik dari A tersebut sebagai akar dan vektor karakteristik dari transformasi linier T.

7.10 DIAGONALISASI

DEFINISI :

Suatu matriks bujur sangkar A dikatakan dapat dibawa (direduksikan) ke bentuk diagonal oleh suatu transformasi similaritas bila terdapat matriks nonsingular P sehingga $P^{-1}AP = D$, dimana D suatu matriks diagonal.

Syarat perlu dan cukup bahwa matriks ordo n A dapat dibawa ke bentuk diagonal (similar dengan suatu matriks diagonal) adalah : A mempunyai n buah vektor karakteristik yang bebas linier. Dalam hal ini bila v_i adalah vektor karakteristik yang bersangkutan dengan akar karakteristik α_j, maka matriks $P = [v_1 \ \ v_2 \ ..... \ v_n]$ dan matriks

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Contoh (7.18) :

Pandang matriks A pada Contoh (7.17).
Untuk $\lambda = 4$ didapatkan vektor karakteristik $\mu \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

kita ambil salah satu, misalnya yang panjangnya = 1 yaitu :

$$\begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

dan untuk $\lambda = -1$, kita pilih $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

ke-2 vektor tersebut bebas linier.

Maka $P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} & 1/\sqrt{12} \\ 3/\sqrt{13} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Silahkan diselidiki bahwa $P^{-1}AP = D$.

7.11. TRANSFORMASI ORTHOGONAL

DEFINISI :

Transformasi linier $T : R^n \rightarrow R^n$ dengan matriks transformasinya A disebut orthogonal bila T memetakan setiap $v \in R^n$ menjadi T(v); tanpa mengubah panjang (norm)-nya, dengan perkataan lain $|T(v)| = Av = v$ ata $(Av), (Av) = v.v$.
A disebut matriks orthogonal.

Jadi panjang suatu vektor tidak berubah bila dilakukan transformasi orthogonal.

Teorema (4) :

$T : R^n \rightarrow R^n$, dengan matriks transformasi A, yang orthogonal. Bila v_1, v_2 vektor sebarang $\in R^n$, maka $(Av_1).(Av_1) = v_1.v_2$.

Bukti :

$$(v_1 + v_2).(v_1 + v_2) = v_1.v_1 + 2v_1.v_2 + v_2.v_2$$

$$\begin{aligned} \rightarrow 2v_1.v_2 &= (v_1 + v_2).(v_1 + v_2) - v_1.v_1 - v_2.v_2 \\ &= A(v_1 + v_2).A(v_1 + v_2) - (Av_1).(Av_1) - (Av_2).(Av_2) \\ &= 2(Av_1).(Av_2). \\ \text{atau } v_1.v_2 &= (Av_1).(Av_2). \end{aligned}$$

Catatan (19) :

Untuk basis yang orthonormal, yaitu basis yang vektor-vektor basisnya saling tegak lurus dan panjangnya = 1; dengan perkataan lain basis $\{b_j\}$ dimana berlaku :

$b_i.b_l \quad = 0$ bila $i \neq j$

$= 1$ bila $i = j$; dengan melakukan transformasi orthogonal, diperoleh basis yang orthogonal pula.

Teorema (5) :

Bila A matriks orthogonal relatif terhadap basis orthonormal maka det(A) = +1, atau −1.

Bukti :

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Kita tahu bahwa kolom-kolom dari A adalah vektor kolom $Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n$; jadi :

$$A^TA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Ae_1.Ae_1 & Ae_1.Ae_2 & \cdots & Ae_1.Ae_n \\ Ae_2.Ae_1 & Ae_2.Ae_2 & \cdots & Ae_2.Ae_n \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ Ae_n.Ae_1 & Ae_n.Ae_2 & \cdots & Ae_n.Ae_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & .. & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$ karena $Ae_i.Ae_j = e_i.e_j$
$= 1$ bila $i = j$
$= 0$ bila $i \neq j$

Jadi $A^TA = I$.
Maka $\det(A^TA) = \det I = 1 \rightarrow \det(A^T).\det(A) = 1$ dan karena $\det(A^T) = \det(A)$ maka $\{\det(A)\}^2 = 1$ atau $\det(A) = \pm 1$.

Catatan (20) :

Pada matriks orthogonal dapat dicatat :

(i) Dot product suatu baris/kolom dengan baris/kolom itu sendiri = 1.

(ii) Dot product suatu baris/kolom dengan baris/kolom yang lain = 0.

(iii) Berlaku $A^{-1} = A^T$.

7.12. ROTASI

Pandang matriks orthogonal $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$,

menurut Catatan (20) di atas, maka,

(1) $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$ (kolom 1 . kolom 1).
(2) $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$ (kolom 2 . kolom 2).
(3) $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$ (kolom 1 . kolom 2)

Misalkan $A = \begin{bmatrix} \cos\Omega & \sin\theta \\ \sin\Omega & \cos\theta \end{bmatrix}$

maka (1) dan (2) ialah terpenuhi dan (3) : $\cos\Omega\sin\theta + \sin\Omega\cos\theta = \sin(\Omega+\theta) = 0$

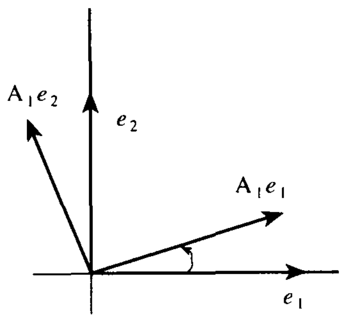
$\rightarrow \Omega + \theta = k\pi$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Cukup kita ambil untuk $= 0$ dan $k = 1$, berarti $\theta = -\theta$, $\theta = \pi - \Omega$.

Kita peroleh matriks orthogonal berordo 2 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega \\ \sin\Omega & \cos\Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega \\ \sin\Omega & \cos\Omega \end{bmatrix} \quad \text{dan}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos\Omega & \sin(\pi-\Omega) \\ \sin\Omega & \cos(\pi-\Omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega \\ \sin\Omega & -\cos\Omega \end{bmatrix}$$

Transformasi orthogonal dengan matriks transformasi A_1



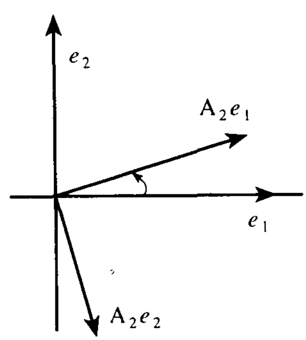
$$A_1e_1 = \begin{bmatrix} \cos\Omega \\ \sin\Omega \end{bmatrix}$$

$$A_1e_2 = \begin{bmatrix} -\sin\Omega \\ \cos\Omega \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa transformasi berupa rotasi langsung sebesar Ω (arah berlawanan jarum jam). Rotasi ini disebut rotasi langsung.

$\mathrm{Det}(A_1) = 1$.

Matriks transformasi A_2



$$A_2e_1 = \begin{bmatrix} \cos\Omega \\ \sin\Omega \end{bmatrix}$$

$$A_2e_2 = \begin{bmatrix} \sin\Omega \\ -\cos\Omega \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa transformasi berupa rotasi sebesar Ω, setelah memantulkan e_2. Maka rotasi ini disebut rotasi cermin.

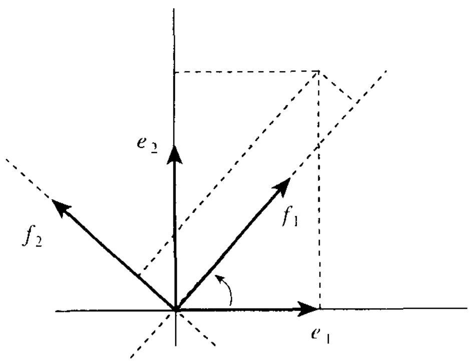
$\mathrm{Det}(A_2) = -1$.

Catatan :

Kita dapat melakukan rotasi sistem koordinat; matriks transformasi merupakan matriks orthogonal.

Kalau $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ koordinat titik relatif terhadap sistem koordinat lama

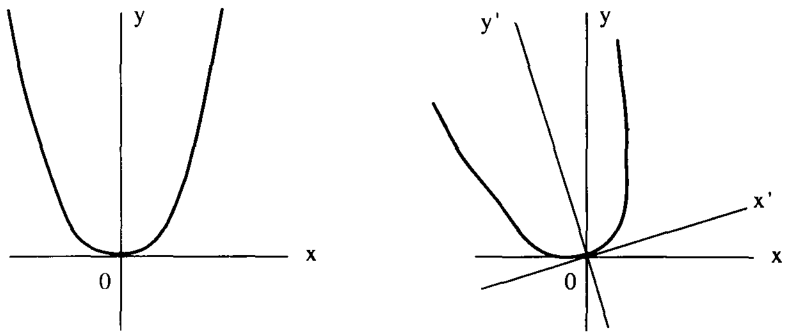
dan $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ relatif terhadap sistem koordinat baru (hasil rotasi).



maka $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega \\ \sin\Omega & \cos\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

Contoh (7.19) :

Suatu parabola $y = x^2$ dirotasikan sebesar 30°, bagaimana persamaannya sekarang ?



Kalau kita pandang menurut sistem koordinat baru x'oy' maka parabola (setelah rotasi) mempunyai persamaan $y' = (x')^2$.

Rumus rotasi $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

atau $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$y' = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,x + \frac{1}{2}y$
$y' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y$

Berarti : $y' = (x')^2 \rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y = (\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y)^2$
$\rightarrow 3x^2 + y^2 + \sqrt{3}\,xy + 2x - 2\sqrt{3}y = 0$, adalah persamaan parabola yang diminta.

7.13. TRANSFORMASI SIMETRIS

Suatu transformasi linier T pada R^n dikatakan suatu transformasi simetris bila untuk setiap u, v $\in R^n$ berlaku dot product: u.T(v) = T(u).v. Matriks transformasi dari suatu transformasi simetris, relatif terhadap suatu basis orthonormal, merupakan matriks simetris.

Teorema (6) :

Akar-akar karakteristik dari matriks A yang simetris adalah riil dan vektor-vektor karakteristik yang bersangkutan dengan akar karakteristik yang berbeda adalah saling tegak lurus (orthogonal).

Hal khusus :

Bila A simetris berordo 2 maka didapatkan 2 vektor karakteristik yang saling tegak lurus dan panjangnya = 1 (vektor karakteristik yang orthonormal).

Bukti :

Misalkan λ_i dan λ_j akar-akar karakteristik dari A maka
$Av_i = \lambda_i v_i$ ....(*)
$Av_j = \lambda_j v_j$.

Kalau A simetris maka $A^T v_j = \lambda_j v_j$, lakukan *conjugate transpose*
$\rightarrow (A^T v_j)^H = (\lambda_j v)^H \rightarrow v^H{}_J\ A = \bar{\lambda}_j v_j^H$ ....(**)
($\bar{\lambda}_j$: conjugate dari λ_j).

Kalikan (**) di kanan dengan v_i dan (*) di kiri dengan v_j^H
$v_j^H\ Av_i = \bar{\lambda}_j v_j^H v_i$ dan $v_j^H Av_i = \lambda_i v_j^H v_i$

Berarti $(\bar{\lambda}_j - \lambda_i)v_j^H v_i = 0$, kalau diambil i = j maka $\sqrt{v_j^H v_i}$ adalah panjang v_j, dimana $|v_j| \neq 0$. Jadi $\bar{\lambda}_j - \lambda_j = 0 \rightarrow \bar{\lambda}_j = \lambda_j \rightarrow$ riil. Berarti setiap akar karakteristik adalah riil. Bila diambil $i \neq j$ maka $\bar{\lambda}_j - \lambda_j \neq 0$, karena akar karakteristik yang berbeda.

Maka $v_j^H v_i = v_j . v_i = 0$, artinya saling tegak lurus.
Kita khususkan sekarang untuk A berordo 2 :
λ_1 dan λ_2 akar-akar karakteristik yang riil

Bila $\lambda_1 \neq \lambda_2$ jelas dari bukti di atas, terdapat v_1 dan v_2 yang saling tegak lurus dan ambil yang panjangnya = 1.
Bila $\lambda_1 = \lambda_2$: Pandang persamaan karakteristik :

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

$\rightarrow$ Diskriminan $(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{12}a_{22} - a_{12}^2) = 0$

$\rightarrow$ $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0$; jumlah 2 bilangan non-negatif = 0, berakibat masing-masingnya = 0, jadi $a_{11} = a_{22}$ dan $a_{12} = 0$. Maka persamaan karakteristik menjadi $\lambda^2 - 2a_{11}\lambda + a_{11}^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = a_{11}$

Semua koefisien dari persamaan $\left.\begin{array}{l}(a_{11} - \lambda)x + 0y = 0 \\ 0x + (a_{11} - \lambda)y = 0\end{array}\right\}$ adalah nol.

Jadi semua vektor di R^2 merupakan vektor karakteristik. Dapat dipilih 2 vektor yang saling tegak lurus dan ambil panjangnya = 1.

Catatan (22) :

Persamaan karakteristik dari matriks A berordo 2, bila A matriks simetris adalah

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0,$$

Bila kita sebut $S = a_{11} + a_{22}$ dan $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \text{ maka persamaan menjadi } \lambda^2 - S\lambda + D = 0.$$

Catatan (23) :

Sebagai kelanjutan Teorema (6) yang lalu, (di sini tidak dibuktikan) terdapat teorema: A adalah suatu matriks yang simetris berordo n, maka meskipun tidak semua akar karakteristik berbeda, selalu didapatkan suatu himpunan n buah vektor karakteristik yang orthonormal (dan bebas linier).

Akibatnya :

Bila A matriks simetris berordo n, maka terdapat suatu matriks orthogonal U, dimana $U^T = U^{-1}$, yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor karakteristik (yang orthonormal), sedemikian sehingga $U^TAU = D$, D = matriks diagonal yang elemen-elemen diagonalnya adalah akar-akar karakteristik.

Contoh (7.21) :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$ tentukan matriks U sehingga $U^TAU = D$.

Bila kita hitung maka akar-akar karakteristik dari A adalah $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 3$ dan vektor karakteristik (yang panjangnya = 1) adalah :

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Maka $U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$, suatu matriks orthogonal

$U^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$, dan $D = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Mudah diselidiki bahwa $U^TAU = D$

7.14. SOAL-SOAL DAN PEMECAHANNYA

7.22. Vektor a mempunyai koordinat [2, 3] relatif terhadap basis $\{f_1 = [3, 1], f_2 = [1, -3]\}$. Carilah koordinatnya relatif terhadap basis natural $\{e_1 = [1, 0], e_2 = [0, 1]\}$ dan juga relatif terhadap basis $\{g_1 = [1, 1], g_2 = [0, 2]\}$.

Penyelesaian :

a = [2, 3] relatif terhadap $\{f_i\}$ berarti :

$a = 2f_1 + 3f_2 = 2[3, 1] + 3[1, -3] = [9, -7]$ relatif terhadap basis natural.

Terhadap basis $\{g_i\}$: misalkan koordinatnya [a, b] berarti : $[a, b]_g = a[1, 1] + b[0, 2] = 9[1, 0] - 7[0, 1]$ atau : [a, a+2b] = 9, −7],jadi a = 9; a+2b = −7 atau b = −8.

Koordinat a relatif terhadap $\{g_i\}$: $[9, -8]_g$.

7.23. Carilah matriks transisi dari perubahan basis $\{e_1 = [1, 0], e_2 = [0, 1]\}$ ke basis baru $\{f_1 = [1, 1], f_2 = [1, 2]\}$ dan sebaliknya dari $\{f_i\}$ ke $\{e_i\}$.

Penyelesaian :

$f_1 = [1, 1] = 1[1, 0] + 1[0, 1] = 1e_1 + 1e_2$
$f_2 = [1, 2] = 1[1, 0] + 2[0, 1] = 1e_1 + 2e_2$.

Jadi matriks transisi dari $\{e_i\}$ ke $\{f_i\}$, $P_e^f = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = P$

$e_1 = [1, 0] = a[1, 1] + b[1, 2] = [a+b, a+2b]$
$e_2 = [0, 1] = c[1, 1] + d[1, 2] = [c+d, c+2d]$.

Kita cari a, b, c, dan d' $a + b = 1$ dan $a + 2b = 0$, jadi $a = 2$, $b = -1$.
$c + d = 0$ dan $c + 2d = 1$, jadi $c = -1$, $d = 1$
$e_2 = -[1, 2] + [1, 2] = -f_1 + f_2$
$e_1 = 2[1, 1] - [1, 2] = 2f_1 - f_2$.
Matriks transisi dari $\{f_i\}$ ke $\{e_i\}$ adalah $P^e_f = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = Q$

Jelas bahwa $PQ = QP = I$.

7.24. Tunjukkan bahwa transformasi berikut linier :
(i) $T[x_1, x_2] = [x_2, x_1]$
(ii) $T[x_1, x_2] = [x_1-x_2, x_2-x_1]$

Penyelesaian :

Untuk setiap $= [v_1, v_2]$ dan $w = [w_1, w_2] \in R^2$ dan λ suatu skalar, selalu berlaku :

(i)
$$\begin{aligned} T(v+w) &= T[v_1+w_1, v_2+w_2] \\ &= [v_2+w_2, v_1+w_1] \\ &= [v_2, v_1] + [w_2, w_1] \\ &= T(v) + T(w) \text{ dan} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\lambda v) &= T[\lambda v_1, \lambda v_2] = [\lambda v_2, \lambda v_1] \\ &= \lambda[v_1, v_2] \\ &= \lambda T(v). \end{aligned}$$

Jadi T linier.

(ii)
$$\begin{aligned} T(v+w) &= T[v_1+w_1, v_2+w_2] \\ &= [v_1+w_1-v_2-w_2, v_2+w_2-v_1-w_1] \\ &= [v_1-v_2, v_2-v_1] + [w_1-w_2, w_2-w_1] \\ &= T(v) + T(w). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\lambda v) &= T[\lambda v_1, \lambda v_2] \\ &= [\lambda v_1 - \lambda v_2, \lambda v_2 - \lambda v_1] \\ &= \lambda[v_1 - v_2, v_2 - v_1] \\ &= \lambda T(v). \end{aligned}$$

Jadi T linier.

7.25. Diketahui di R^3 transformasi linier T yang menstransformasikan : $T[1, 0, 0] = [1, 1, 0]$, $T[0, 1, 0] = [2, 1, -1]$, $T[0, 0, 1] = [1, 2, 3]$.

Carilah :

(i) Matriks transformasi linier T relatif terhadap basis: $\{e_1 = \{1,0,0], e_2 + [0,1,0], e_3 = [0,0,1]\}$

(ii) Peta dari vektor [3,2,1]

(iii) Peta dari garis g : $x = [3,2,1]^T + \lambda[1,2,3]^T$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} T[1, 0, 0] = [1, 1, 0] &= 1e_1 + 1e_2 + 0e_2 \\ T[0, 1, 0] = [2, 1, -1] &= 2e_1 + 1e_1 - 1e_3 \\ T[0, 0, 1] = [1, 2, 3] &= 1e_1 + 2e_2 + 3e_3 \end{aligned}$$

Matriks transformasi

$$[T]^e_e = A \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi peta dari [3, 2, 1] :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{atau } [8, 7, 1].$$

Peta dari garis g: $x = [3, 2, 1]^T + [1, 2, 3]^T$ adalah $y = A[3, 2, 1]^T + \lambda A[1, 2, 3]T = [8, 7, 1]^T + \lambda[8, 9, 7]^T$.

7.26. Carilah matriks transformasi linier T di R^2 yang didefinisikan sebagai berikut :

(i) $T(v) = T[x, y] = [2y, 3x-y]$,

(ii) $T[x, y] = [3x-4y, x+5y]$, relatif terhadap basis natural $\{e_1\}$.

Penyelesaian :

(i) Karena relatif terhadap basis $\{e_i\}$ kita transformasikan vektor-vektor basis tersebut :

$T(e_1) = T[1, 0] = [0, 3] = 0e_1 + 3e_2$

$T(e_2) = T[0, 1] = [2, -1] = 2e_1 - e_2$

$$[T]^e_e = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(ii) $T(e_1) = T[1, 0] = [3, 1] = 3e_1 + e_2$

$T(e_2) = T[0, 1] = [-4, 5] = -4e_1 + 5e_2$

$$[T]^e_e = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

7.27. Diketahui sebuah transformasi linier $T : R^3 \to R^3$, dimana $T[x, y, z] = [x+2y-z, y+z, x+y-2z]$

Carilah basis dan dimensi dari ruang peta dan ruang nolnya !

Penyelesaian :

Ruang peta adalah ruang yang dibentuk oleh $T(e_1)$, $T(e_2)$, $T(e_3)$ yaitu : $T(e_1) = T[1, 0, 0] = [1, 0, 1]$, $T[e_2) = T[0, 1, 0] = [2, 1, 1]$, dan $T(e_3) = T[0, 0, 1] = [-1, 1, -2]$.

Ruang peta adalah $L\{[1, 0, 1], [2, 1, 1], [-1, 1, -2]\}$

Untuk mencari basis dan dimensi L kita cari rank matriks transformasi :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{K_{32}^{(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \overset{K_{31}^{(3)}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi dimensi ruang kolom dari A = 2, berarti juga dimensi dari Im(T) = 2 dan basisnya boleh kita pilih $\{[1, 0, 1], [2, 1, 1]\}$.

Ruang nol kita cari sebagai berikut :
Misalnya $v = [v_1, v_2, v_3] \in Ker(T)$ berarti $T[v_1, v_2, v_3] = [0, 0, 0] \rightarrow [v_1+2v_2-v_3, v_2+v_3, v_1+v_2-2v_3] = [0, 0, 0]$.

Diperoleh susunan persamaan linier homogen :

$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 - v_3 &= 0 \\ v_2 + v_3 &= 0 \\ v_1 + v_2 - 2v_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Kita harus mencari dimensi dan basis dari ruang jawab susunan persamaan di atas. Kita cari rank matriks koefisien A

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

yaitu $= 2$. Jadi dimensi ruang jawab
$= n - r = 3 - 2 = 1$.

berarti juga dimensi ruang nol (kernel) dari T tersebut = 1.

Cukup kita pilih 2 persamaan saja :

$$\begin{aligned} v_1 + 2v_2 - v_3 &= 0 \\ v_2 + v_3 &= 0 \end{aligned}$$

dan kita tentukan sebuah parameter, misalnya $v_2 = \lambda$, jadi $v_3 = -\lambda$ dan $v_1 = -3\lambda$ atau ruang jawab : $v = \lambda[-3, 1, -1]$. Sehingga $Ker(T) = L\{[-3, 1, -1]\}$ dan basisnya boleh dipilih $[-3, 1, -1]$.

7.28. Diketahui transformasi-transformasi linier T dan S di R^2 sebagai berikut : $T[x, y] = [0, x]$ dan $S[x, y] = [y, x]$.

Carilah peta dari $a = [2, 1]$ terhadap produk transformasi sebagai berikut : (i) ST; (ii) TS; (iii) S^2.

Penyelesaian :

Kita boleh mewakilkan transformasinya (kita sebut A dan B).

Maka :

$T[1, 0] = [0, 1]$ Jadi $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$T[0, 1] = [0, 0]$

$S[1, 0] = [0, 1]$ Jadi $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$S[0, 1] = [1, 0]$

(i) ST : $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$BAa = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ atau $[2, 0]$

(ii) TS : $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$ABa = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ atau $[0, 1]$

(iii) $S^2 : B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$

S^2 adalah transformasi identitas.
Jadi $S^2(a) = Ia = a = [2, 1]$.

7.29. T adalah suatu transformasi linier di R^3 yang didefinisikan sebagai : $T[x, y, z] = [2x, 4x-y, 2x+3y-z]$.
(i) Tunjukkkan bahwa T mempunyai invers
(ii) Carilah rumus untuk transformasi invers tersebut

Penyelesaian :

(i) Untuk membuktikan bahwa T mempunyai invers, cukup kita buktikan bahwa matriks transformasinya A mempunyai invers (determinannya $\neq 0$).
$T[1, 0, 0] = [2, 4, 2]$, $T[0, 1, 0]$ $[0, -1, 3]$, dan $T[0, 0, 1] = [0, 0, -1]$

Jadi $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ dan $\det(A) = 2 \neq 0$

Jadi A mempunyai invers.

(ii) Kita cari A^{-1} =

$$\frac{\text{adj.A}}{\det(A)} = {}^1/_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 14 & -6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1/_2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

jadi peta dari sebarang vektor $[r, s, t] \in R^3$:

$$\begin{bmatrix} {}^1/_2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1/_2 r \\ 2r-s \\ 7r-3s-t \end{bmatrix}$$

7.30. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ adalah matriks suatu transformasi linier T.

Carilah matriks transformasi relatif terhadap basis $\{f_1 = [1, 3], f_2 = [2, 5]\}$.

Penyelesaian :

$T(f_1) = Af_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 15 \end{bmatrix}$ atau [7, 15]

$T(f_2) = Af_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 26 \end{bmatrix}$ atau [12, 26]

Koordinator-koordinator di atas adalah relatif terhadap basis $\{(e_1)\}$;

(*) [7, 15] = a[1, 3] + b[2, 5] = [a+2b, 3a+5b] atau : a + b = 7 dan 3a + 5b = 15, a = –5, b = 6.

(**) [12, 26] = c[1, 3] + d[2, 5] = [c+2d. 3c+5d] atau : c + 2d = 12 dan 3c + 5d = 26, c = –8, d = 10.

Jadi $[T]^f_f = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$

7.31. Diketahui $T : R^3 \to R^3$ dimana

$$\begin{array}{lcl} [1, 0, 0] & \to & [2, 1] \\ [0, 1, 0] & \to & [5, -4] \\ [0, 0, 1] & \to & [-3, 7]. \end{array}$$

Ditanya :

(i) Matriks transformasi relatif terhadap basis-basis natural dari R^3 dan R^2.

(ii) Matriks transformasi relatif terhadap basis $\{f_1 = [1, 1, 1], f_2 = [1, 1, 0], = [1, 0, 0]\}$ dari R^3 dan basis $\{g_1 = [1, 3], g_2 = [2, 5]\}$ dari R^2

(iii) Tentukan peta vektor v = [2, 1, 1] sebelum dan sesudah pergantian basis.

Penyelesaian :

(i) Secara mudah $[T]^{\varepsilon}_{e} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$

(bila $\{e_i\}$ basis natural dari R^3 dan $\{\varepsilon_i\}$ basis natural dari R^2).

(ii) $[T]^{g}_{f} = (p^{g}_{\varepsilon})^{-1}[T]^{\varepsilon}_{e}(P^{f}_{e})$

$g_1 = \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2$

$g_2 = 2\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2$

$$P^{g}_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{dan } (P^{g}_{\varepsilon})^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$f_1 = e_1 + e_2 + e_3$

$f_2 = e_1 + e_2 + 0e_3$

$f_3 = e_1 + 0e_2 + 0e_3$

$$P^{f}_{e} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka } [T]^{g}{}_{l} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12 & -41 & -8 \\ 8 & 24 & 5 \end{bmatrix}$$

(iii) Sebelum pergantian basis peta dari [2, 1, 1] adalah

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Sesudah pergantian basis :

$$(P^{g}{}_{\varepsilon})^{-1}[T]^{\varepsilon}{}_{e}v_{e} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 13 \end{bmatrix}$$

7.32. Carilah semua akar karakteristik dari $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$

dan basis dari masing-masing ruang vektor karakteristiknya (eigenspace).

Penyelesaian :

Persamaan karakteristiknya :

$$\begin{vmatrix} 1-t & -3 & 3 \\ 3 & -5-t & 3 \\ 6 & -6 & 4-t \end{vmatrix} = 0 \text{ atau } (t+2)^2(t-4) = 0$$

Jadi akar-akar karakteristiknya $t_1 = t_2 = -2$, $t_3 = 4$

Untuk t = –2 kita mencari vektor-vektor dan ruang karakteristiknya sebagai berikut : Av = tv atau :

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

atau : $\left.\begin{aligned} 3v_1 - 3v_2 + 3v_3 &= 0 \\ 3v_1 - 3v_2 + 3v_3 &= 0 \\ 6v_1 - 6v_2 + 6v_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$

rank = 1, cukup kita ambil atau persamaan $3v_1 - 3v_2 + 3v_3 = 0$ atau $v_1 - v_2 + v_3 = 0$.

Kita pilih $n - r = 3 - 1 = 2$ parameter, kita peroleh ruang jawab $v = \lambda[1, 1, 0] + \mu[1, 0, -1]$; λ, μ sebarang bilangan.

Ruang jawab tersebut adalah ruang karakteristik (eigenspace) yang dibentuk oleh dua vektor karakteristik yang bebas linier [1, 1, 0] dan [1, 0, –1] yang boleh dipilih sebagai basisnya. Untuk akar karakteristik t = 4.

$$Aw = tw = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

atau : $\left.\begin{aligned} -3w_1 - 3w_2 + 3w_3 &= 0 \\ 3w_1 - 9w_2 + 3w_3 &= 0 \\ 6w_1 - 6w_2 \quad\quad &= 0 \end{aligned}\right\}$

Kita cari rank : $\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{H_{21}^{(-1)}} \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{H_{32}^{(-1)}}$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jelas rank = 2, cukup kita ambil 2 persamaan :

$$\begin{aligned} -3w_1 - 3w_2 + 3w_2 &= 0 \rightarrow w_1 + w_2 - w_3 = 0 \\ 6w_1 - 6w_2 &= 0 \rightarrow w_1 - w_2 = 0 \end{aligned}$$

Kita ambil parameter $w_1 = \mu$, $w_2 = w_1 = \mu$ dan $w_3 = 2\mu$.

Ruang jawab : $w = \mu[1, 1, 2]$. Jadi, ruang karakteristik (eigenspace) untuk akar karakteristik t = 4 berdimensi satu dan dibentuk oleh vektor karakteristik [1, 1, 2].

7.33. Matriks = $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$

pada soal 7.32. yang lalu adalah diagonalisabel (dapat dibawa ke bentuk diagonal) oleh transformasi similaritas, karena didapatkan 3 vektor karakteristik yang bebas linier yaitu :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka kalau P = $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

dan D = $\begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

berlaku $D = P^{-1}AP$ (silakan diselidiki).

7.15. SOAL-SOAL LATIHAN

7.34. Carilah matriks transisi dari perubahan basis :

(i) Basis $\{e_1 = [1, 0], e_2 = [0, 1]\}$ ke basis $\{f_1 = [2, 1], f_2 = [3, 0]\}$ dan sebaliknya dari $\{f_i\}$ ke $\{e_i\}$

(ii) Basis $\{e_1 = [1, 0, 0], e_2 = [0, 1, 0], e_3 = [0, 0, 1]\}$ ke basis $\{f_1 = [1, 0, 0], f_2 = [1, 1, 0], f_3 = [1, 1, 1]\}$.

(iii) Basis $\{f_1 = [1, 2], f_2 = [2, 3]\}$ ke basis $\{g_1 = [2, 1], g_2 = [4, 3]\}$.

Jawab :

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

7.35. Kalau vektor-vektor berikut mempunyai koordinat yang relatif terhadap basis $\{e_1 = [1, 0], e_2 = [0, 1]\}$, carilah koordinatnya relatif terhadap basis $\{f_1 = [2, 1], f_2 = [3, 0]\}$ (pakailah matriks transisi dari soal 7.34. (i) di atas) :

(i) a = [2, 1],

(ii) a = [5, 4].

Jawab :

(i) [1, 0], (ii) [4, –1].

7.36. Vektor-vektor berikut mempunyai koordinat yang relatif terhadap basis $f_1 = [1, 2]$, $f_2 = [2, 3]$, carilah koordinatnya relatif terhadap basis $g_1 = [2, 1]$, $g_2 = [4, 3]$. [pakai matriks transisi pada soal 8.34. (iii):

(i) [2, 2],

(ii) [0, 1].

Jawab :

[–11, 7], [–3, 2].

7.37. Diketahui suatu susunan koordinat Cartesian di R^2. Dua vektor $f_1 = [2, 1]$ dan $f_2 = [-1, 2]$ titik awalnya berimpit dengan titik (2, 2) dan kita bentuk susunan koordinat baru dengan vektor-vektor basis f_1 dan f_2.

(i) Periksa apakah susunan koordinat baru tersebut tegak lurus.

(ii) Carilah koordinat titik R(12, 7) relatif terhadap susunan koordinat baru tersebut.

(iii) Carilah koordinat vektor a = [3, 1], relatif terhadap basis baru.

(iv) Bagaimana bentuk persamaan garis y = x relatif terhadap basis baru?

Jawab :

(5, 0), ($^7/_5$, $^1/_5$),x' = 3y'.

7.38. Apakah transformasi ini linier :

(i) $[x_1, x_2] \to [x_1+1, x_2]$

(ii) $[x_1, x_2, x_3) \to [x_3, x_1 - x_2, -x_2]$;

(iii) $[x_1, x_2, x_3] \to [0, 0, 0]$;

(v) $[x_1, x_2] \to [x_1, x_2, x_2]$

(v) $[x_1, x_2] \to [x_1^2, x_2^3]$

(vi) $[x_1, x_2] \to [2x_1 - x_2, x_1]$

Jawab : tidak ; linier, linier, tidak, tidak, linier

7.39. Carilah matriks transformasi dari transformasi-transformasi berikut relatif terhadap basis natural, dan relatif terhadap basis $\{f_1 = [1, 2], f_2 = [2, 3]\}$ bila : (i) $T(x) = 2x$, pada R^2; (ii) $T[x, y] = [2x-3y, x+y]$; (iii) $T[x, y] = [5x+y, 3x-2y]$

Jawab :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 18 & 25 \\ -11 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -23 & -39 \\ 15 & 26 \end{bmatrix}$$

7.40. Diketahui T suatu transformasi linier pada R^3 dimana :

$[3, 7, 2] \to [10, 9, 12]$;

$[1, 2, 1] \to [3, 3, 4]$;

$[4, 5, 3] \to [9, 8, 12]$;

Carilah matriks transformasi, peta dari bidang V : $r = [0, 0, -1] + \lambda[1, 1, 1] + \mu[2, 3, 1]$.

Bila dilakukan pergantian basis ke $\{f_1 = [1, 0, 0], f_2 = [1, 1, 0], f3 = [1, 1, 1]\}$, bagaimana matriks transformasi dan peta dari bidang V di atas relatif terhadap $\{f_i\}$?

Jawab :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad r' = [0, -1, -1] + \lambda[2, 2, 3] + [5, 4; 6];$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad r_f' = [1, 0, -1] + \lambda[0, -1, 3] + \mu[1, -2, 6]$$

7.41. Diketahui sebuah transformasi linier pada R^2 yang mentransformasikan suatu ellips dengan persamaan $x^2/9 + y^2/7 = 1$ menjadi lingkaran $x'^2 + y'^2 = 1$. Carilah : (i) matriks transformasinya: (ii) peta dari garis $y = 2x$.

Jawab :

(i) $\begin{bmatrix} {}^1/_3 & 0 \\ 0 & {}^1/_{\sqrt{7}} \end{bmatrix}$ (ii) $6x' - y'\sqrt{7} = 0$

7.42. T adalah transformasi linier di R^3 :

$T(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$; $T(e_2) = e_1 - e_2 + e_3$; $T(e_3) = e_1 - 3e_2 + 3e_2$, dimana $e_1 = [1, 0, 0]$, $e_2 = [0, 1, 0]$, dan $e_3 = [0, 0, 1]$.

(i) Carilah matriks transformasi relatif terhadap basis $\{e_i\}$

(ii) Carilah ruang peta dan ruang nolnya

Jawab :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad R^3, L\{0\}$$

7.34. A adalah matriks transformasi dari T di R^2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

(i) Apakah transformasi T singular ?

(ii) Carilah basis ruang peta dan ruang nol dari transformasi tersebut. (Jawab : Ya; [2, 4], [3, –2]).

7.44. Carilah transformasi linier a yang ruang petanya dibentuk oleh vektor-vektor : [1, 2, 3] dan [4, 5, 6].

Jawab :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & \lambda+4\mu, \\ 2 & 5 & 2\lambda+5\mu \\ 3 & 6 & 3\lambda+6\mu \end{bmatrix} \quad \lambda \text{ dan } \mu \text{ sebarang.}$$

7.45. Diketahui transformasi-transformasi linier T_1 :" $[y_1, y_2, y_3] = [2x_1+3x_2+x_3, 5x_1+x_3, x_2+x_3]$, T_2 : $[z_1, z_2, z_3] = [y_1, y_2+y_3, y_1]$.

Carilah (i) matriks transformasinya, (ii) matriks dari produk transformasi T_2T_1, (iii) peta dari [1, 1, 0] terhadap T_2T_1, (iv) apakah T_2T_1 mempunyai invers?

Jawab :

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) [5, 6, 5]

(iv) tidak

7.46. Diketahui matriks transformasi :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

dari dua transformasi linier di R^2. Carilah peta dari a = [1, 1] terhadap produk transformasi : (i) AB, (ii) BA, (iii) A^2, (iv) B^2.

Jawab :

[7, 11]; [10, 8]; [11, 13]; [8, 4]).

7.47. Apakah transformasi-transformasi berikut mempunyai invers, bila ada carilah matriks transformasi inversnya. (i) T(x) = 3x di R^2, (ii) T(x, y] = [1, x+y], (iii) T[x, y, z} = [x+y, x−z, y].

Jawab :

$\begin{bmatrix} {}^1/_3 & 0 \\ 0 & {}^1/_3 \end{bmatrix}$, tidak $\begin{bmatrix} {}^1/_2 & {}^1/_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ {}^1/_2 & -{}^1/_2 & 0 \end{bmatrix}$

7.48. y = [2, 0, 1] adalah peta dari x dengan suatu transformasi Ax = y dimana

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Carilah x tersebut.

Jawab :

[1, 1, 1].

7.49. Diketahui $\{g_1, g_2\}$ adalah suatu basis dari R^2 dan T adalah transformasi linier di R^2 : $T(g_1) = 3g_1 - 2g_2$ dan $T(g_2) = g_1 + 4g_2$.

Kalau $\{h_1, h_2\}$ basis lain dari R^2 sehingga $h_1 = g_1 + g_2$ dan $h_2 = 2g_1 + 3g_2$, carilah matriks transformasi dari T relatif terhadap basis $\{h_i\}$.

Jawab :

$$\begin{bmatrix} 8 & 11 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

7.50. Bila A similar B, buktikan :

(i) A^2 similar B^2

(ii) det(A) = det(B).

(iii) akan karakteristik mereka sama.

7.51. Carilah akar-akar karakteristik dan vektor-vektor karakteristik yang bersangkutan dari matriks berikut, apakah matriks diagonalisabel?

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Jawab :

(i)$_1$ = 5, μ[1, 1], $\lambda_2 = -1$, μ[2, –1], ya; (ii) $\lambda_1 = 4$, μ[1, 1], $\lambda_2 = 1$, μ[2, -1], ya; (iii) $\lambda = 4$, μ[1, 1], tidak.

7.52. Carilah 2 vektor karakteristik yang panjangnya 1 dan saling tegak lurus dari transformasi simetris berikut :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 7 & \sqrt{10} \\ \sqrt{10} & 4 \end{bmatrix}$

Jawab :

(i) $2 + \sqrt{5}, \dfrac{[2, 1+\sqrt{5}]}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$; $2-\sqrt{5}, \dfrac{[2, 1-\sqrt{5}]}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$

(iii) $\lambda_1 = 9$, $[5/7, 2/\sqrt{14}]$, $\lambda_2 = 2$, $[\sqrt{2/7}, -5/\sqrt{35}]$

7.53. Carilah akar karakteristik dan basis ruang karakteristiknya, dari transformasi linier dengan matriks transformasi :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & -23 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab:

(i) $\lambda = 1$, $\{[1, 0, 0], [0, 0, 1]\}$, tidak diagonalisabel

(ii) $\lambda_1 = 1$, $\{[3, 0, -4]\}$; $\lambda_2 = 3$, $\{[4, 1, 3]\}$; $\lambda_3 = -24$, $\{[4, -25, 3]\}$, diagonalisabel.

7.54. Sebuah bujur sangkar dibatasi oleh vektor-vektor [1, 0] dan [0, 1] ditransformasikan menjadi sebuah jajaran genjang yang dibatasi oleh vektor-vektor [3, 0] dan [1, 2]. Carilah matriks transformasi dan determinan matriks transformasi tersebut. Tunjukkan bahwa determinan tersebut menyatakan perbandingan luas antara peta dengan prapetanya (jadi perbandingan luas antara jajaran genjang bujur sangkar).

Jawab :

$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 6, luas bujur sangkar = 1, luas jajaran genjang = 6.

7.55. Dengan cara sama seperti 7.54. hitung isi bidang empat yang bertitik sudut di (0, 0, 0), (1, 0, 0), (5, –3, 1), (–7, 1, 5).

Jawab : 8

7.56. Titik K berkoordinat (1, 1) pada sistem koordinat Cartesian di R^2. Apabila dilakukan rotasi sistem koordinat sebesar 30°, berapa koordinat K sekarang? Bagaimana persamaan ellips $x^2 + y^2/4 = 1$ relatif terhadap sistem baru?

Jawab :

$(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3})$, $13x'^2 - 6x'y'\sqrt{3} + 7y'^2 = 16$.

7.57. $T : R^3 \rightarrow R^3$ memproyeksikan semua vektor-vektor di R^3 ke bidang $y - z = 0$. Tentukan matriks transformasinya dan proyeksi vektor [2, 6, 4].

Jawab :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad ; \quad [2, 5, 5]$$

7.58. Diketahui suatu transformasi dari bidang XY ke bidang UV dengan rumus transformasi :

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy. \end{array}\right\}$$

Apakah transformasi ini linier ? Tentukan dan gambar peta dari daerah yang dibatasi oleh garis $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$.

Jawab :

tidak; daerah yang dibatasi parabola-parabola $u = 1 - v^2/4$, $u = -1 + v^2/4$, $v = (1-u^2)/2$.

7.59. Suatu matriks simetris Q disebut definit positif apabila semua akar karakteristiknya positif. Bila Q definit positif maka terdapat matriks definit positif $R = UD^{1/2}U^T$ dimana $D = U^TQU$ matriks diagonal dan $D^{1/2}$ matriks diagonal yang elemen diagonalnya $\lambda_i^{1/2}$; sedemikian sehingga $R^2 = Q$. Buktikan ! (R disebut akar dari Q).

Hitung akar dari :

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

Jawab :

$$R_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

CONTOH PROGRAM

MENCARI PETA

```
10  'program mencari peta
20  CLS:INPUT"banyak baris matriks transformasi";P
30  INPUT"banyak kolom matriks transformasi";Q
40  DIM A(P,Q),B(Q),C(P)
50  PRINT:PRINT"ELEMEN MATRIKS TRANSFORMASI :":PRINT
60  FOR I = 1 TO P : FOR J=1 TO Q:
    PRINT"BARIS";I;KOLOM";J;:J;:INPUT A(I,J):NEXT J,I
70  PRINT:PRINT"ELEMEN VEKTOR YANG DIPETAKAN:":PRINT
80  FOR J = 1 TO Q : PRINT"BARIS";J;:INPUT B(J):NEXT J
90  FOR I = 1 TO P
100 C(I)=0
110 FOR K=1 TO Q
120 C(I) = C(I) + A(I,K) * B(K)
130 NEXT K
140 NEXT I
150 'mencetak PETA
160 CLS:PRINT"VEKTOR PETA:":PRINT
170 FOR I = 1 TO P
180 PRINT USING"####,#";C(I)
190 NEXT 1
200 END
```

CONTOH SOAL

ROTASI VEKTOR

```
10  'program mencari peta akibat rotasi
20  CLS:INPUT"SUDUT ROTASI";P
30  INPUT"VEKTOR YANG DIROTASI ";E,F
40  G = E*COS(P) - F*SIN(P)
50  H = E*SIN(P) + F*COS(P)
60  CLS:PRINT"VEKTOR HASIL ROTASI:":PRINT
70  PRINT USING"####.####";G
80  PRINT USING"####.####";H
90  END
```

CONTOH PROGRAM

EIGENVALUE MATRIKS ORDO 2

```
10  'menghitung eigenvalue matriks ordo 2
20  CLS:PRINT"MATRIKS : ":PRINT
30  PRINT" A B "
40  PRINT" C D ":PRINT
50  PRINT " Harga A :";: INPUT A
60  PRINT " Harga B :";: INPUT B
70  PRINT " Harga C :";: INPUT C
80  PRINT " Harga D :";: INPUT D
90  DET=A*D-B*C
100 EG1=((A+D)+SQR((A+D)^2—4*DET))/2
110 EG2=((A+D)-SQR((A+D)^2-4*DET))/2
120 PRINT:PRINT:PRINT"EIGENVALUE : ":PRINT
130 PRINT USING"###.##";EG1;:PRINT" dan ";:
    PRINT USING"###.###";EG2
140 PRINT:PRINT"EIGEN VAKTOR berturut-turut:":PRINT
150 PRINT"[";:PRINT USING"###.##";B;:
    PRINT USING"###.##';A-EG1;:PRINT"]"
160 PRINT "   D A N   "
170 PRINT"[";:PRINT USING"###.##";B;:
    PRINT USING"###.##";A-EG2;:PRINT"]"
180 END
```