

MODEL EPIDEMIK SIR UNTUK PENYAKIT YANG MENULAR SECARA HORIZONTAL DAN VERTIKAL

ILMIYATI SARI¹, HENGKI TASMAN²

¹Pusat Studi Komputasi Matematika, Universitas Gunadarma, ilmiyati@staff.gunadarma.ac.id

²Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Indonesia, htasman@ui.ac.id

Abstrak. Penyakit merupakan masalah yang selalu ada dalam kehidupan manusia. Penularan penyakit dari satu individu ke individu lainnya dapat terjadi secara horizontal maupun vertikal. Artikel ini membahas pemodelan penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal dengan menggunakan model epidemik SIR beserta analisis dinamikanya. Dinamika model digambarkan dari kelakuan titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan epidemik dan titik kesetimbangan bebas-infeksi. Bilangan reproduksi dasar (R_0) digunakan untuk menentukan kriteria kestabilan titik kesetimbangan. Secara teori, agar suatu penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal tidak menjadi endemik di suatu populasi, maka populasi tersebut harus dijaga agar bilangan reproduksi dasar kurang dari satu. Namun sebaliknya, jika bilangan reproduksi dasar lebih besar dari satu, maka akan terjadi endemik penyakit tersebut. Untuk mendukung teori dalam penelitian ini, dilakukan simulasi dengan menggunakan software Matlab.

Kata Kunci: *penularan horizontal, penularan vertikal, model SIR, bilangan reproduksi dasar*

1 Pendahuluan

Model matematika merupakan salah satu alat yang dapat membantu mempermudah penyelesaian masalah dalam kehidupan nyata. Masalah-masalah tersebut dapat dibawa ke dalam model matematis dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu. Selanjutnya, dari model yang didapat dicari solusinya, baik dengan cara analitis maupun secara numerik [1].

Salah satu permasalahan di kehidupan nyata adalah mengenai penyebaran suatu penyakit. Pada tahun 1927, W. O. Kermack dan A. G. McKendrick memperkenalkan sebuah model penyebaran penyakit. Model matematika yang dimaksud adalah model epidemik SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*) klasik. Secara umum, model epidemik SIR klasik dapat disajikan sebagai sistem persamaan diferensial *autonomous*. Sampai saat ini, model epidemik SIR klasik tersebut telah dikembangkan oleh ilmuwan lain seperti Picollo dan Billings [2], dan K. J. Varen [3] untuk mempelajari penyebaran penyakit dalam kasus-kasus tertentu.

Model epidemik SIR klasik membagi populasi menjadi tiga kelompok, yaitu kelompok individu yang sehat tetapi dapat terinfeksi penyakit (*susceptible*), kelompok individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit (*infected*), dan kelompok individu yang telah sembuh dan kebal dari penyakit (*recovered*) [4].

Secara garis besar, model epidemik SIR klasik menggambarkan alur penyebaran penyakit dari kelompok individu *susceptible* menjadi *infected* melalui kontak langsung atau perantara lain. Selanjutnya, kelompok individu *infected* yang mampu bertahan terhadap penyakit akan sembuh dan memasuki kelompok *recovered* [5].

Proses penyebaran penyakit dari satu individu ke individu yang lain dalam suatu populasi dapat terjadi dalam dua cara. Pertama, seseorang tertular penyakit akibat mengadakan kontak langsung dengan penderita suatu penyakit. Penularan seperti ini disebut penularan secara horizontal. Kedua, seseorang terkena penyakit karena orang tunya pengidap penyakit tertentu. Penularan seperti ini disebut penularan secara vertikal. Hepatitis B adalah contoh penyakit yang dapat menular secara horizontal dan vertikal.

2 Pembahasan

Dalam proses pemodelan secara matematis dari epidemik penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal, populasi penduduk dibagi menjadi tiga kelas individu, yaitu:

1. individu *susceptible* adalah individu yang sehat dan dapat terinfeksi penyakit,
2. individu *infectious* adalah individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakitnya,
3. individu *recovered* adalah individu yang telah sembuh dari penyakit.

Asumsi-asumsi yang digunakan dalam proses pemodelan epidemik penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal, adalah sebagai berikut:

1. jumlah populasi tetap,
2. populasi penduduk bersifat tertutup, dalam pengertian bahwa terjadinya penambahan atau pengurangan jumlah penduduk hanya melalui kelahiran dan kematian, sedangkan penambahan atau pengurangan jumlah penduduk melalui imigrasi atau emigrasi diabaikan,
3. laju kelahiran sama dengan laju kematian,
4. penyakit dapat disembuhkan,
5. seseorang yang sudah sembuh dari penyakit tersebut tidak akan terserang lagi karena telah mempunyai sistem kekebalan seumur hidup,
6. setiap individu mempunyai kemungkinan yang sama untuk melakukan kontak dengan individu lain dalam populasi,
7. tidak ada masa inkubasi apabila terjadi proses penularan,
8. populasi bersifat homogen,
9. individu yang lahir dari orang tua yang *infectious* dan *recovered* mempunyai kekebalan sementara.

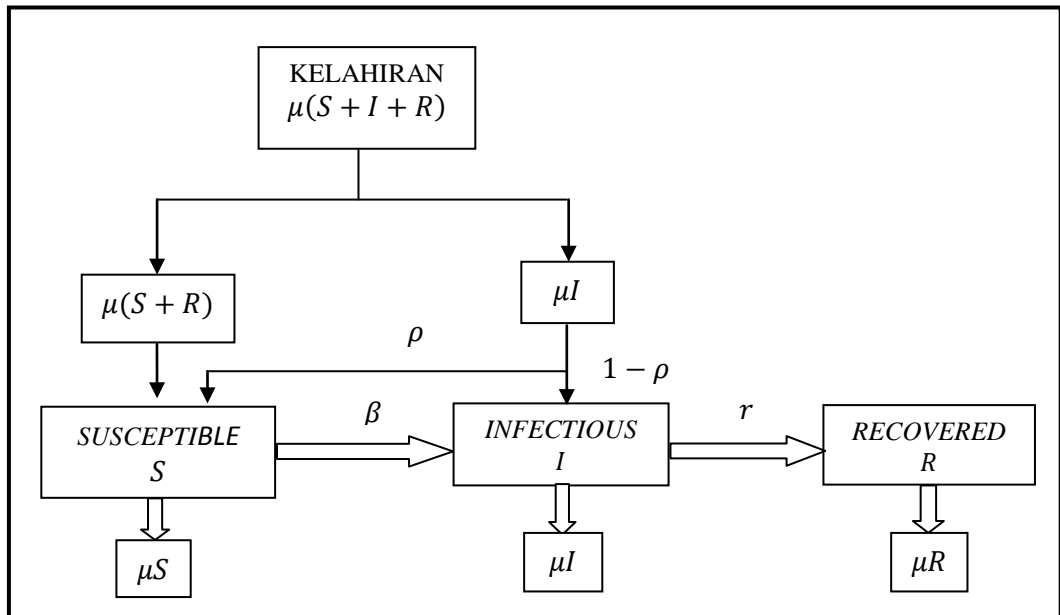
Dan, variabel-variabel serta parameter-parameter yang digunakan adalah sebagai berikut:

1. S menyatakan proporsi subpopulasi individu *susceptible* pada saat t , $S > 0$,
2. I menyatakan proporsi subpopulasi individu *infectious* pada saat t , $I \geq 0$,
3. R menyatakan proporsi subpopulasi individu *recovered* pada saat t , $R \geq 0$,
4. μ menyatakan laju kematian dan kelahiran alami per kapita,
5. β menyatakan laju terjadinya kontak dengan individu *infectious*,
6. r menyatakan laju kesembuhan individu *infectious* per kapita,

7. ρ menyatakan probabilitas keturunan atau bayi yang lahir dari orang tua yang *infectious* adalah individu yang *susceptible*, $0 < \rho < 1$.

2.1 Model Epidemik SIR

Berdasarkan asumsi-asumsi dan variabel-variabel serta parameter-parameter yang digunakan, maka secara skematis, dinamika populasi penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 1 Dinamika populasi pada model SIR dengan penularan secara horizontal dan vertikal

Keterangan:

- a. Perubahan proporsi subpopulasi individu *susceptible* (S) terhadap waktu (t)
 Pertambahan proporsi individu *susceptible* per satuan waktu dipengaruhi oleh proporsi kelahiran dari individu *susceptible* dan *recovered*, dinotasikan dengan $\mu(S + R)$, dan proporsi kelahiran individu *susceptible* yang lahir dari orang tua yang *infectious* sebesar $\mu\rho I$. Pengurangan proporsi individu *susceptible* per satuan waktu dipengaruhi oleh: βSI , yaitu proporsi individu *susceptible* yang terinfeksi penyakit per satuan waktu, dan μS , yaitu proporsi individu *susceptible* yang mati secara alami per satuan waktu, sehingga

$$\frac{dS}{dt} = \mu(S + R) - \beta SI - \mu S + \mu\rho I. \quad (1)$$

- b. Perubahan proporsi subpopulasi individu *infectious* (I) terhadap waktu (t)
 Pertambahan proporsi individu *infectious* per satuan waktu dipengaruhi oleh: βSI , yaitu proporsi individu *susceptible* yang terinfeksi penyakit per satuan waktu, dan proporsi kelahiran individu *infectious* yang lahir dari orang tua yang *infectious* sebesar $(1 - \rho)I$. Pengurangan proporsi individu *infectious* per satuan waktu dipengaruhi oleh: rI , yaitu proporsi kesembuhan individu *infectious* per

satuan waktu, dan μI , yaitu proporsi individu *infectious* yang mati secara alami per satuan waktu, sehingga

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \mu I + (1 - \rho)\mu I - rI. \quad (2)$$

c. Perubahan proporsi subpopulasi individu *recovered* (R) terhadap waktu (t)

Pertambahan proporsi individu *recovered* per satuan waktu dipengaruhi oleh rI , yaitu proporsi kesembuhan individu *infectious* per satuan waktu. Pengurangan proporsi individu *recovered* per satuan waktu dipengaruhi oleh μR , yaitu proporsi individu *recovered* yang mati secara alami per satuan waktu, sehingga

$$\frac{dR}{dt} = rI - \mu R. \quad (3)$$

Jadi, model epidemik penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal dapat dimodelkan secara matematis ke dalam sistem persamaan diferensial nonlinier orde satu berikut ini:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu(S + R) - \beta SI - \mu S + \mu \rho I, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \mu I + (1 - \rho)\mu I - rI, \\ \frac{dR}{dt} &= rI - \mu R. \end{aligned} \quad (4)$$

Pada sistem (4), $\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$. Hal ini menunjukkan bahwa populasi berukuran tetap. Karena S , I , dan R berturut-turut menotasikan proporsi dari subpopulasi individu *susceptibles*, *infectious*, dan *recovered*, maka $S + I + R = 1$.

2.2 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar menyatakan rata-rata banyaknya kasus kedua (individu *infectious* baru) yang disebabkan satu individu *infectious* selama masa terinfeksi dalam keseluruhan populasi *susceptible* [6]. Metode yang digunakan dalam penurunan bilangan reproduksi dasar (R_0), yaitu metode pendekatan operator generasi selanjutnya, yang mengacu pada penelitian Castillo-Chavez, C., Feng, Z., Huang, W. (2002) [6]. Berdasarkan metode pendekatan operator generasi selanjutnya, maka untuk sistem (4) berlaku:

$$\begin{aligned} X &= (S, R), \quad Z = I, \\ f_S(X, Z) &= \mu(S + R) - \beta SI - \mu S + \mu \rho I, \\ f_R(X, Z) &= rI - \mu R, \\ h(X, Z) &= \beta SI - \mu I + (1 - \rho)\mu I - rI. \end{aligned}$$

a. Misalkan $U_0 = (X^*, 0) = (S^*, R^*, 0)$ adalah titik kesetimbangan bebas-infeksi, maka:

- (i) dari persamaan $f_R(S^*, R^*, 0) = 0$ diperoleh $R^* = 0$,
- (ii) dari $S(t) + I(t) + R(t) = 1$, diperoleh $S^* = 1$, sehingga $U_0 = (S^*, R^*, 0) = (1, 0, 0)$.

b. Misalkan $K = \frac{\partial}{\partial I} h(S^*, R^*, 0)$.

$$\begin{aligned} \text{Karena } \frac{\partial}{\partial I} h(S^*, R^*, 0) &= \beta 1 - \mu + (1 - \rho)\mu - r \\ &= \beta - \mu\rho - r. \end{aligned}$$

Maka $K = \beta - \mu\rho - r$. Karena K dapat dituliskan dalam bentuk $K = M - D$ dengan $M = \beta > 0$ dan $D = \mu\rho + r > 0$, maka

$$R_0 = \sigma(MD^{-1}),$$

$$= \frac{\beta}{\mu\rho + r}, \tag{5}$$

dengan $\sigma(P)$, menyatakan spektral radius dari matriks P.

2.3 Analisa Dinamika

Untuk mengetahui dinamik dari sistem (4), maka pada subbab ini dilakukan analisa dinamik terhadap sistem (4). Analisa dinamik dari sistem (4) yang dilakukan adalah analisa kestabilan titik kesetimbangan dari sistem (4). Sistem (4) memiliki dua titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan yang pertama dinamakan titik kesetimbangan bebas-infeksi, yaitu titik kesetimbangan (S^*, I^*) dari sistem (4) dengan $I^* = 0$. Titik kesetimbangan yang kedua dinamakan titik kesetimbangan epidemik, yaitu titik kesetimbangan (S_1^*, I_1^*) dari sistem (4) dengan $I^* > 0$. Analisa dinamik yang dilakukan adalah analisa kestabilan titik kesetimbangan bebas-infeksi dan titik kesetimbangan epidemik dari sistem (4).

Sistem (4) adalah sistem persamaan diferensial nonlinier, sehingga untuk menganalisa kestabilan titik kesetimbangan bebas-infeksi dan titik kesetimbangan epidemik dari sistem (4), terlebih dahulu dilakukan linierisasi dari sistem (4) di sekitar titik kesetimbangan tersebut.

Karena populasi berukuran tetap, maka untuk menganalisa kestabilan titik kesetimbangan sistem (4) dapat dilakukan dengan menganalisa sistem berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \mu(1 - I) - \beta SI - \mu S + \mu\rho I,$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \mu I + (1 - \rho)\mu I - rI, \tag{6}$$

Sistem (6) dapat disebut juga sebagai model SI.

Berdasarkan Guckenheimer dan Holmes (1983) [7], kondisi kesetimbangan dipenuhi ketika

$$\mu(1 - I) - \beta SI - \mu S + \mu\rho I = 0,$$

$$\beta SI - \mu I + (1 - \rho)\mu I - rI = 0. \tag{7}$$

Dari persamaan (7) diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu

1. Titik kesetimbangan bebas-infeksi (S^*, I^*) yaitu kondisi dimana tidak terdapat individu *infectious* dalam populasi, secara matematis dinyatakan dengan $I^* = 0$,

$$(S^*, I^*) = (1, 0).$$

2. Titik kesetimbangan epidemik (S_1^*, I_1^*) yaitu kondisi dimana terdapat individu *infectious* dalam populasi, $I_1^* > 0$,

$$(S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{\mu\rho + r}{\beta}, \frac{\mu(R_0 - 1)}{\mu R_0(1 - \rho) + \beta} \right).$$

Titik kesetimbangan epidemik ada jika $R_0 > 1$.

2.3.1 Analisa Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas-Infeksi

Misalkan A adalah matriks Jacobian dari sistem (6) di titik kesetimbangan bebas-infeksi (S^*, I^*) , maka

$$A = \begin{pmatrix} -\mu & -\mu - \beta + \mu\rho \\ 0 & \beta - \mu\rho - r \end{pmatrix},$$

persamaan karakteristik dari matriks A adalah

$$(\lambda - \mu)(\lambda - \beta + \mu\rho + r), \tag{8}$$

dan akar-akar karakteristik dari persamaan (8) adalah

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu < 0, \\ \lambda_2 &= \beta - (\mu\rho + r) = (R_0 - 1)(\mu\rho + r). \end{aligned}$$

Dari akar-akar karakteristik persamaan (8), diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

- a. Jika $R_0 < 1$, maka $\lambda_2 < 0$,
- b. Jika $R_0 > 1$, maka $\lambda_2 > 0$,

karena akar-akar karakteristik dari persamaan karakteristik (8) bernilai negatif jika $R_0 < 1$ dan terdapat satu akar karakteristik dari persamaan karakteristik (8) yang bernilai positif jika $R_0 > 1$, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

- 1. Jika $R_0 < 1$, maka titik kesetimbangan bebas-infeksi (S^*, I^*) bersifat stabil asimtotik lokal.
- 2. Jika $R_0 > 1$, maka titik kesetimbangan bebas-infeksi (S^*, I^*) bersifat tidak stabil.

2.3.2 Analisa Kestabilan Titik Kesetimbangan Epidemik

Misalkan B adalah matriks Jacobian dari sistem (6) di titik kesetimbangan epidemik (S_1^*, I_1^*) , maka

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-\beta\mu(R_0-1)}{\mu R_0(1-\rho)+\beta} - \mu & -\mu - r \\ \frac{\beta\mu(R_0-1)}{\mu R_0(1-\rho)+\beta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Persamaan karakteristik dari matriks B adalah

$$\lambda^2 + \lambda \left(\frac{\beta\mu(R_0-1)}{\mu R_0(1-\rho)+\beta} + \mu \right) + (\mu + r) \frac{\beta\mu(R_0-1)}{\mu R_0(1-\rho)+\beta} = 0. \tag{9}$$

Akar-akar persamaan karakteristik persamaaan (9) bernilai negatif jika jumlah akar-akarnya bernilai kurang dari nol, $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ dan hasil kali akar-akarnya bernilai lebih besar dari nol, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. Agar kondisi $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ dan $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ terpenuhi, maka nilai R_0 pada persamaan (9) harus lebih besar dari 1, $R_0 > 1$. Oleh karena itu, agar akar-akar persamaan karakteristik persamaaan (3.9) bernilai negatif, maka $R_0 > 1$, sehingga titik keseimbangan epidemik (S_1^*, I_1^*) stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$, sedangkan jika $R_0 < 1$, titik kesetimbangan epidemik (S_1^*, I_1^*) tidak ada.

3 Simulasi

Simulasi model epidemik SIR tanpa efek vaksinasi pada persamaan (4) dilakukan sebanyak dua kali dengan menggunakan *software* Matlab. Pada simulasi pertama, nilai parameter diatur agar bilangan reproduksi dasar (R_0) pada persamaan (5) bernilai kurang dari satu, sedangkan nilai parameter pada simulasi kedua diatur agar bilangan reproduksi dasar (R_0) bernilai lebih besar dari satu.

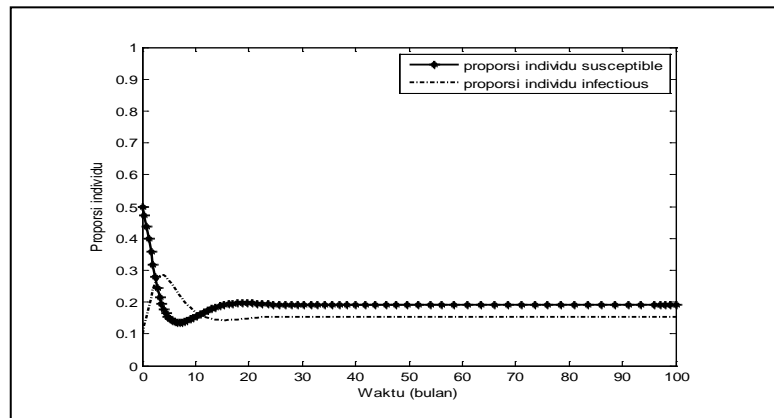
Nilai parameter yang digunakan pada simulasi pertama ini dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1 Nilai parameter pada simulasi pertama

Parameter	Nilai Parameter
μ	0,07/bulan
β	1,9/bulan
r	0,3/bulan
ρ	0,9

Berdasarkan persamaan (5), bilangan reproduksi dasar (R_0) dari sistem (4) dengan nilai parameter pada Tabel 1 adalah 5,342. Karena bilangan reproduksi dasar dari simulasi ini bernilai lebih besar dari 1, maka berdasarkan hasil pada subbab 3.1.2, titik kesetimbangan epidemik, (S_1^*, I_1^*) , dari sistem (4) stabil, dengan $(S_1^*, I_1^*) = (0,191; 0,153)$.

Berikut ini adalah simulasi untuk model SIR pada persamaan (4) dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 1.



Gambar 2 Proporsi individu *susceptible* dan *infectious* pada model epidemik SIR dengan nilai parameter pada Tabel 1

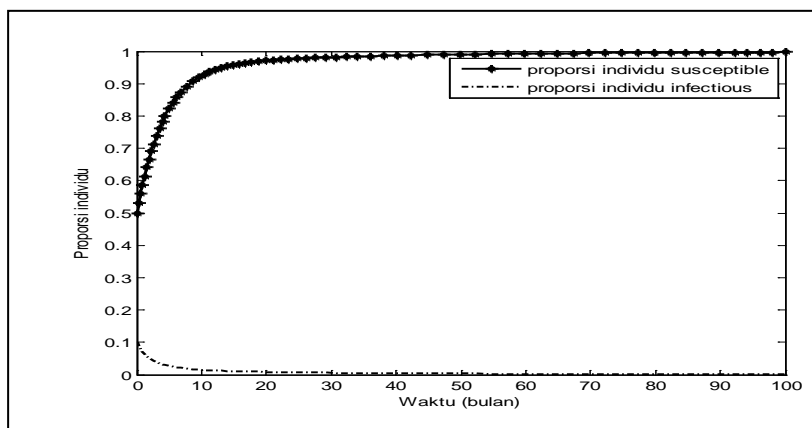
Berdasarkan Gambar 2 terlihat bahwa pada saat $t = 0$, proporsi individu *susceptible* adalah 0,5 dan proporsi individu *infectious* adalah 0,1; ini sesuai dengan kondisi awal yang diberikan. Setelah bulan ke-30, proporsi individu *susceptible* dan *infectious* tidak mengalami perubahan. Pada keadaan ini, sistem berada pada keadaan yang stabil. Dari Gambar 2 terlihat bahwa sistem dalam keadaan stabil ketika proporsi individu *susceptible* sebesar 0,1910 dan proporsi individu *infectious* sebesar 0,1530.

Selanjutnya dilakukan simulasi ulang untuk sistem (4) dengan nilai parameter yang digunakan pada Tabel 2.

Tabel 2 Nilai parameter pada simulasi kedua

Parameter	Nilai Parameter
μ	0,3/bulan
β	0,8/bulan
r	0,55/bulan
ρ	0,9

Berdasarkan persamaan (5), Bilangan reproduksi dasar (R_0) dari sistem (4) dengan nilai parameter pada Tabel 2 adalah 0,9756. Sistem (4) ini stabil ke titik kesetimbangan bebas-infeksi (S^*, I^*), dengan $(S^*, I^*) = (1, 0)$. Berikut ini hasil adalah hasil simulasi sistem (4) dengan nilai parameter pada Tabel 2.



Gambar 3 Proporsi individu *susceptible* dan *infectious* pada model epidemik SIR dengan nilai parameter pada Tabel 2

Berdasarkan Gambar 3 terlihat bahwa proporsi individu *susceptible* lama kelamaan semakin bertambah seiring dengan berjalannya waktu, berbanding terbalik dengan proporsi individu *infectious* yang lama kelamaan semakin berkurang seiring dengan berjalannya waktu. Setelah bulan ke-50 dari penelitian proporsi individu *susceptible* dan *infectious* tidak mengalami perubahan. pada saat ini sistem stabil, dengan proporsi individu *susceptible* pada saat ini adalah 1 dan proporsi individu *infectious* adalah 0.

Dari kedua simulasi di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal dapat hilang dengan sendirinya (tanpa melakukan pemberian vaksinasi) dari suatu populasi asalkan bilangan reproduksi dasar-nya kurang dari satu.

4 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari penelitian ini dapat dirinci sebagai berikut:

1. Model epidemik SIR untuk penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal dinyatakan dalam sistem (4). Bilangan reproduksi dasar (R_0) dari sistem ini adalah $\frac{\beta}{\mu\rho+r}$,
 - a. jika $R_0 < 1$, titik kesetimbangan bebas-infeksi $(S^*, I^*) = (1, 0)$ stabil asimtotik lokal,
 - b. Jika $R_0 > 1$, titik kesetimbangan epidemik $(S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{\mu\rho+r}{\beta}, \frac{\mu(R_0-1)}{\mu R_0(1-\rho)+\beta}\right)$ stabil asimtotik lokal,
2. Penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal tidak akan menjadi endemik disuatu populasi asalkan bilangan reproduksi dasar (R_0) kurang dari satu,
3. Parameter ρ , yang menotasikan probabilitas bayi dari orang tua yang *infectious* adalah individu *susceptible*, mempengaruhi kecepatan kestabilan dari solusi

periodik bebas infeksi. Bilangan reproduksi dasar (R_0) dari model epidemik SIR menurun ketika ρ meningkat, sehingga dengan memperbesar nilai ρ akan mempercepat kondisi kestabilan solusi periodik bebas infeksi. Hal ini secara teoritis mengilustrasikan bahwa orang tua sebaiknya memberikan perhatian yang lebih terhadap kesehatan mereka sehingga menghindarkan keturunannya dari penyakit yang mungkin diturunkan.

5 Daftar Pustaka

1. Thamrin, H dkk. 2007. *Model SIR Penyakit Tidak Fatal*. Jurusan Matematika UGM, Yogyakarta.
2. Picollo, C.III dan Billings, L. 2005 "The effect of vaccinations in an immigrant model" *Mathematical and Computer Modeling* 42 291-299.
3. Vareen, K.J. (2008). *An SCIR model of meningococcal meningitis*. Commonwealth University, Virginia.
4. Hethcote, H.W. 2000 "The mathematics of infectious disease" *SIAM Review* 42(4) 599-653.
5. Nugroho, S. 2009. *Pengaruh Vaksinasi terhadap Penyebaran Penyakit dengan Model Endemi SIR*. Jurusan matematika Universitas 11 Mater, Surakarta.
6. Castillo-Chavez, C., Feng, Z. dan Huang, W. 2002 "On the computation of R_0 and its role on global stability" *Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging Infectious Diseases: An Introduction* 125 229-250.
7. Guckenheimer, J. dan Holmes, P. (1983). *Nonlinear oscillation, dynamical systems, and bifurcations of vektor fields*. Springer-Verlag, New York.

