

# PELABELAN HARMONIS PADA GRAF TIMBANGAN

Ilmiyati Sari<sup>1</sup>, Nurma Nugraha<sup>2</sup>, Rifki Kosasih<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Pusat Studi Komputasi Matematika, Universitas Gunadarma  
e-mail: <sup>1</sup>[ilmiyati@staff.gunadarma.ac.id](mailto:ilmiyati@staff.gunadarma.ac.id), <sup>2</sup>[nurma@staff.gunadarma.ac.id](mailto:nurma@staff.gunadarma.ac.id),  
<sup>3</sup>[rifki\\_kosasih@staff.gunadarma.ac.id](mailto:rifki_kosasih@staff.gunadarma.ac.id)

## Abstrak

Misalkan  $G$  adalah graf dengan himpunan simpul  $V(G)$  dan himpunan busur  $E(G)$ . Suatu pemetaan  $\lambda$  dari  $V(G)$  ke  $Z_{|E(G)|}$  dimana  $|E(G)| \geq |V(G)|$  disebut pelabelan harmonis jika  $\lambda$  merupakan pemetaan injektif sedemikian sehingga ketika setiap busur  $xy$  diberi label dengan  $w(xy) = \lambda(x) + \lambda(y)$  menghasilkan label yang berbeda. Dalam makalah ini akan diperkenalkan bentuk graf timbangan dan konstruksi pelabelan harmonis pada graf timbangan.

Kata Kunci : pelabelan harmonis, graf timbangan.

---

---

## PENDAHULUAN

---

---

Pelabelan harmonis diperkenalkan oleh Graham dan Sloane pertama kali pada tahun 1980 berawal dari masalah pada *error correcting code*. Pelabelan harmonis mempunyai beberapa aplikasi, salah satunya untuk pembagian saluran radio. Misalkan tersedia sebanyak  $|E|$  saluran frekuensi, simpul-simpul mempresentasikan stasiun komunikasi dan busur mempresentasikan jalur komunikasi yang ada dari satu stasiun ke stasiun yang lain. Dengan memberikan kode pada setiap stasiun, setiap jalur komunikasi dapat memperoleh saluran frekuensi dengan menjumlahkan kode dua stasiun yang berkomunikasi [1].

Banyak peneliti yang telah melakukan penelitian mengenai pelabelan harmonis, seperti pelabelan harmonis pada gabungan graf caterpillar [1], pelabelan harmonious pada graf firecracker, graf hairycycle, dan graf korona [2], dll.

Dalam penelitian ini penulis berusaha menemukan graf baru yang dapat dilabelkan dengan pelabelan harmonis. Graf baru yang ditemukan

dalam penelitian ini nantinya disebut sebagai graf timbangan. Graf timbangan merupakan gabungan antara graf lingkaran dengan tiga buah simpul dan graf bintang pada kiri dan kanan graf lingkaran dengan  $r$  buah simpul, dan banyaknya simpul pada graf timbangan selalu ganjil.

Pelabelan pada graf timbangan dibagi menjadi empat bagian, yaitu bagian pusat timbangan, tangan kanan graf timbangan, tangan kiri graf timbangan, dan pelabelan pada batang tangan graf timbangan.

---

---

## TUJUAN

---

---

Tujuan penelitian ini adalah membuat graf baru yang nantinya dinamakan sebagai graf timbangan yang dapat dilabelkan dengan pelabelan harmonis.

---

---

## METODOLOGI

---

---

Metode yang digunakan untuk mencari graf baru yang dapat dilabelkan dengan pelabelan harmonis adalah dengan studi literatur mengenai pelabelan harmonis

dan berbagai jenis graf yang dapat dilabelkan dengan pelabelan harmonis. Selanjutnya penulis berusaha mencari graf baru yang dapat dilabelkan dengan pelabelan harmonis.

## LANDASAN TEORI

Dalam penelitian ini graf yang digunakan adalah graf yang berhingga dan tak berarah.

### A. Pelabelan Harmonis

Misalkan  $G$  adalah graf dengan himpunan simpul  $V(G)$  dan himpunan busur  $E(G)$ . Untuk selanjutnya  $V(G)$  ditulis sebagai  $V$  dan  $E(G)$  ditulis sebagai  $E$ . Suatu pemetaan  $\lambda$  dari  $V$  ke  $Z_{|E|}$  dimana  $|E| \geq |V|$  disebut pelabelan harmonis jika  $\lambda$  merupakan pemetaan injektif sedemikian sehingga ketika setiap busur  $xy$  diberi label dengan  $w(xy) = \lambda(x) + \lambda(y)$  menghasilkan label yang berbeda [1].

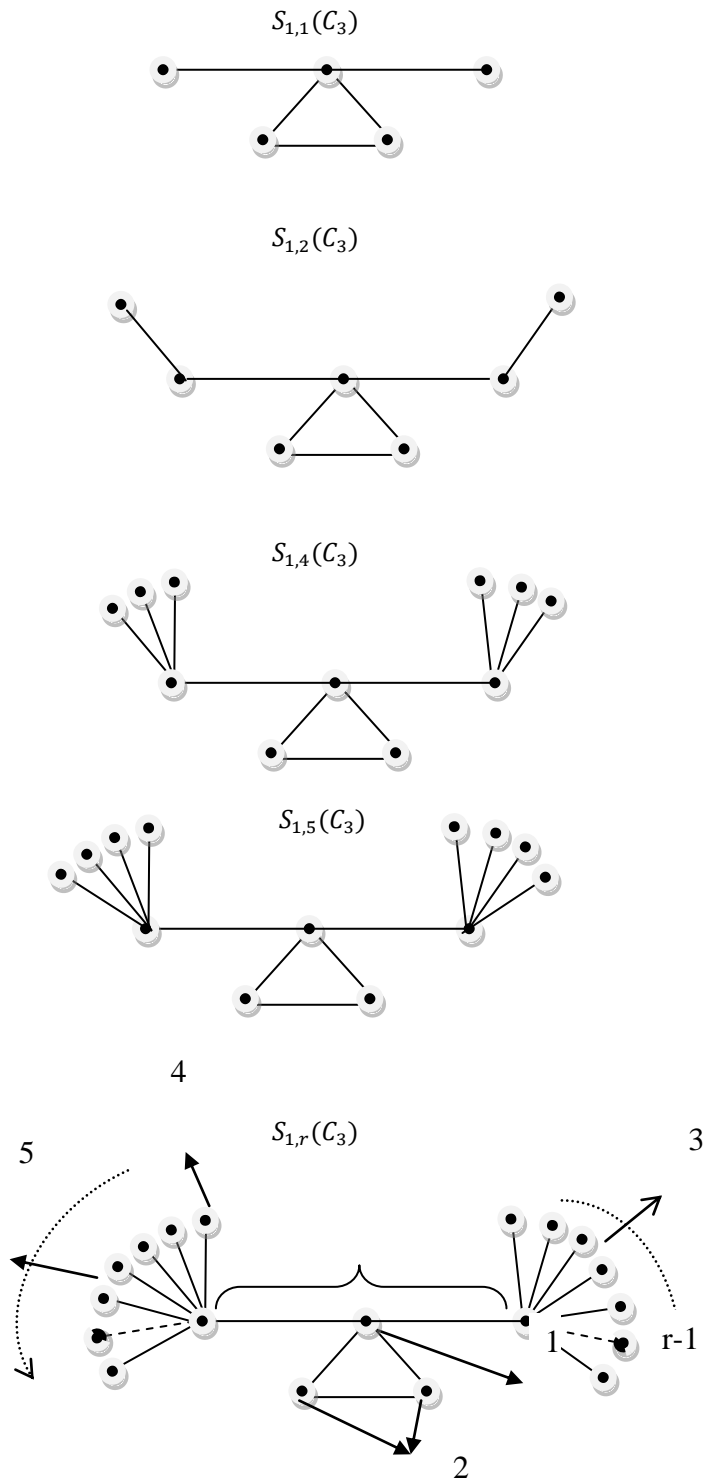
Karena label-label busur merupakan elemen  $Z_{|E|}$  dan berbeda maka  $\{W(e) | e \in E(G)\} = Z_{|E|} = \{[0], [1], [2], \dots, [e-1]\}$ . Untuk  $|E| < |V|$  label boleh berulang sebanyak  $|V| - |E| + 1$  kali. Graf yang memiliki pelabelan harmonis disebut graf harmonis [1].

### 2. Graf Timbangan

Graf timbangan merupakan gabungan antara graf lingkaran dengan tiga buah simpul dan graf bintang pada kiri dan kanan graf lingkaran dengan  $r$  buah simpul, dan banyaknya simpul pada graf timbangan selalu ganjil.

Graf timbangan  $S_{1,r}(C_3)$  (Graf timbangan dengan  $C_3$  sebagai poros timbangan, dengan satu buah graf  $S_r$  di kanan dan kirinya) adalah gabungan graf  $C_3$  (graf lingkaran dengan 3 buah simpul) dengan 2 buah graf bintang  $S_r$  (graf bintang dengan  $r$  buah simpul), dimana antara pusat  $S_r$ ,  $C_3$ , dan pusat  $S_r$  yang lain dihubungkan dengan sebuah lintasan. Berikut ini diberikan beberapa contoh

graf timbangan dan bentuk umum dari graf timbangan diberikan pada Gambar 1.



- Keterangan: 1. Pusat timbangan  
 2. Kaki timbangan  
 3. Tangan kanan  
 4. Tangan kiri ke-1  
 5. Tangan kiri

Gambar 1. Graf Timbangan

Banyak simpul pada graf timbangan adalah  $n$ , dan  $r - 1$  merupakan banyaknya simpul luar (simpul pada tangan kanan dan tangan kiri) pada graf timbangan, sehingga  $n = 2r + 3$ .

## Pelabelan Harmonis pada Graf Timbangan

Pelabelan harmonis pada graf timbangan dibagi menjadi empat bagian, yaitu bagian pusat timbangan, tangan kanan graf timbangan, tangan kiri graf timbangan, dan pelabelan pada batang tangan graf timbangan.

Langkah pelabelan simpul pada graf timbangan sebagai berikut :

Pelabelan pada graf timbangan dibagi menjadi empat bagian, dan arah pelabelan pada semua bagian berlawanan arah jarum jam.

- Pelabelan pada simpul pusat timbangan.

Simpul pusat timbangan dilabelkan dengan :  $\{0,1,2\}$

- Pelabelan pada simpul tangan dan batang tangan.

Pelabelan dimulai dari simpul tangan kiri ke satu, yaitu :

$$\left\{3,4,5, \dots, \binom{n-1}{2}\right\}$$

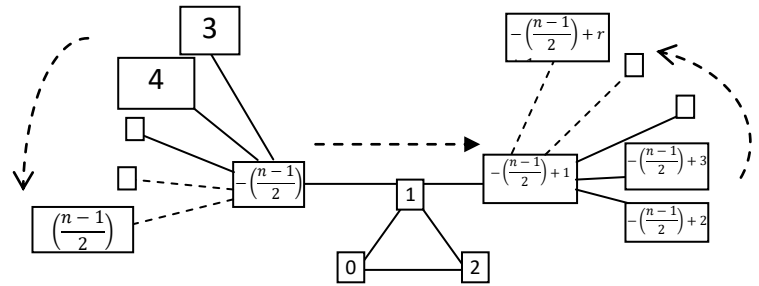
Dilanjutkan dengan simpul batang tangan sebelah kiri ke sebelah kanan, yaitu :

$$\left\{-\binom{n-1}{2}, -\binom{n-1}{2} + 1\right\}$$

Lalu diteruskan ke simpul paling bawah tangan kanan, yaitu :

$$\left\{-\binom{n-1}{2} + 2, -\binom{n-1}{2} + 3, \dots, -\binom{n-1}{2} + r + 1\right\}$$

Pelabelan harmonis pada graf timbangan diberikan pada Gambar 2 berikut ini.



Gambar 2. Pelabelan harmonis pada graf timbangan

Jika pelabelan ini dirubah ke bilangan positif, maka pelabelannya menjadi :

- Pelabelan pada simpul pusat timbangan.

Simpul pusat timbangan dilabelkan dengan :  $\{0,1,2\}$

- Pelabelan pada simpul tangan dan batang tangan.

Pelabelan dimulai dari simpul tangan kiri ke satu, yaitu :

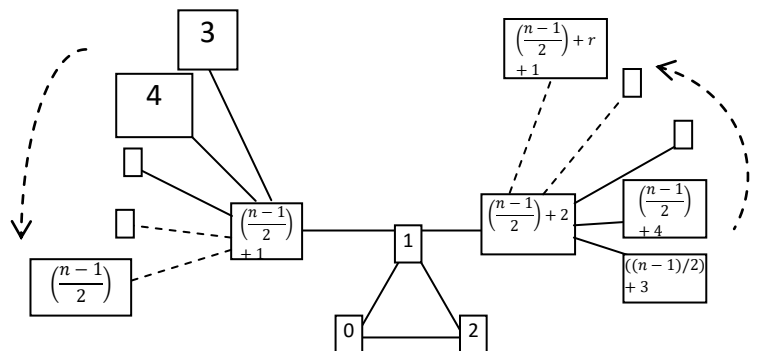
$$\left\{3,4,5, \dots, \binom{n-1}{2}\right\}$$

Dilanjutkan dengan simpul batang tangan sebelah kiri ke sebelah kanan, yaitu :

$$\left\{\binom{n-1}{2} + 1, \binom{n-1}{2} + 2\right\}$$

Lalu diteruskan ke simpul paling bawah tangan kanan, yaitu :

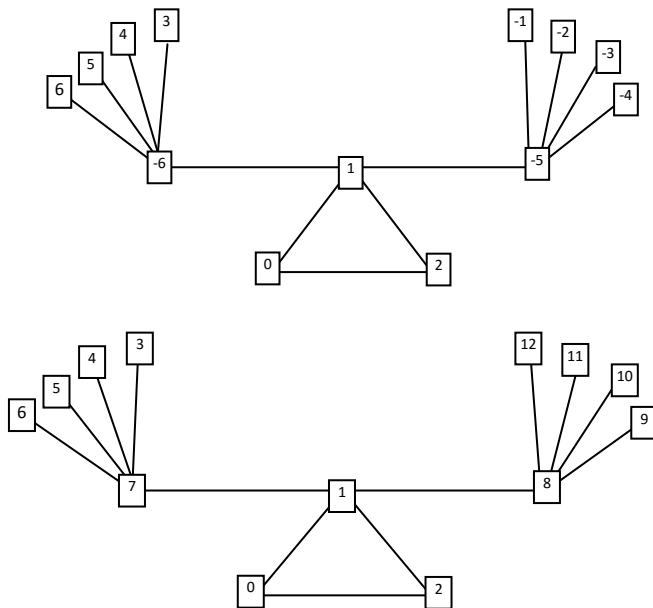
$$\left\{\binom{n-1}{2} + 3, \binom{n-1}{2} + 4, \dots, \binom{n-1}{2} + r + 1\right\}$$



Gambar 3. Pelabelan harmonis pada graf timbangan (positif)

Dengan pelabelan diatas maka diperoleh himpunan seluruh pelabelan busurnya adalah  $\{0,1,2, \dots, |E|-1\}$  dan didapatkan graf harmonis. ■

Untuk memperjelas konstruksi pelabelan harmonis pada graf timbangan, maka berikut ini diberikan gambar pelabelan pada  $S_{1,5}(C_3)$ .



Gambar 4. Pelabelan harmonis pada graf timbangan  $S_{1,5}(C_3)$

---



---

## KESIMPULAN

---

Berdasarkan pembahasan pada makalah ini maka dapat diperoleh kesimpulan bahwa sembarang graf timbangan adalah harmonis.

---



---

## DAFTAR PUSTAKA

---

- [1]. Wirnadian P, Priyanto H, Artianto Y, Sugeng KA. (2010). Pelabelan Harmonis Pada Gabungan Graf Caterpillar. *Prosiding Seminar Nasional Universitas Parahiyangan Bandung*.
- [2]. Graham, R.L., & Sloan, N.J. (1980). On Additive Bases and Harmonious Graphs. *SIAM. Alg. Discrete Meth*.
- [3]. Anggie Juliasih. (2009). *Pelabelan Harmonious pada Graf Firecracker, Graf Hairycycle, dan Graf Korona*. Skripsi, Departemen Matematika FMIPA UI, 2009.