ESTIMASI PARAMETER AUTOREGRESIVE (AR) DENGAN FUNGSI MARGINAL LIKELIHOOD

[1]Ilmiyati Sari
[2]Fevi Novkaniza

[1]Pusat Studi Komputasi Matematika, Universitas Gunadarma
e-mail: ilmiyati@staff.gunadarma.ac.id
[2]Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Indonesia

Abstrak

Estimasi parameter model *autoregressive* dapat diperoleh dengan beberapa metode, salah satunya adalah metode Marginal Likelihood. Untuk memperoleh fungsi marginal likelihood, proses *autoregressive* dapat dinyatakan sebagai *structural model* (Fraser, 1968). Dalam *structural model*, data runtun waktu stasioner dinyatakan sebagai kombinasi linear dari *mean* proses dan variabel error yang tidak terobservasi. Dengan mengganggap variabel error sebagai proses *circular*, diperoleh sifat distribusi dari variabel error yang tidak bergantung pada parameter populasi, sehingga data runtun waktu mengikuti model *Location-scale*. Melalui model *Location*-Scale dapat dibuktikan bahwa vektor data runtun waktu yang distandarisasi merupakan *ancillary statistic*. *Ancillary statistic* ini menjadi dasar untuk membangun fungsi marginal likelihood karena distribusi dari *ancillary statistic* bebas dari parameter populasi.

Kata kunci: estimasi parameter *autoregressive*, fungsi marginal likelihood, *structural model*, proses *circular*, *ancillary statistic*.

PENDAHULUAN

Dalam berbagai penelitian sering kali diperoleh data yang berhubungan dengan waktu, atau yang lebih dikenal dengan istilah runtun waktu. Runtun waktu adalah himpunan barisan pengamatan yang terurut dengan waktu, dengan jarak interval waktu yang sama (Box – Jenkins, 1976). Jika barisan pengamatan tersebut dicatat dalam waktu yang kontinu maka disebut runtun waktu kontinu. Sedangkan jika barisan pengamatan dicatat dalam waktu diskrit maka disebut runtun waktu diskrit.

Pada tahun 1970, Box & Jenkins memperkenalkan model runtun waktu yang biasa digunakan untuk memodelkan runtun waktu yaitu *Autoregressive Moving Avarage* (ARMA (p,q)), dimana p dan q berturut-turut adalah orde dari *autoregressive* dan *moving avarage*. Suatu proses runtun waktu agar dapat dimodelkan dengan model ARMA, harus memenuhi sifat stasioner, yaitu fungsi mean dan variansinya konstan terhadap waktu, dan fungsi autokovariansi antara dua observasi pada dua titik waktu yang berbeda hanya bergantung pada selisih antara dua titik waktu tersebut. Salah satu bentuk khusus dari model ARMA adalah *autoregressive* yang merupakan model ARMA dengan bagian moving avarage berorde 0. Model *autoregressive* berdasarkan namanya adalah regresi terhadap dirinya sendiri (Jonathan D. Cryer, 1986).

Dalam suatu model *autoregressive* perlu dilakukan penaksiran parameter yang terdapat dalam model *autoregressive* tersebut. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk mengestimasi parameter dalam model *autoregressive* adalah metode Marginal Likelihood. Untuk memperoleh fungsi marginal likelihood dalam proses *autoregressive*, maka proses *autoregressive* dapat dinyatakan sebagai *struktural model* (Fraser, 1968).

Berbeda dengan fungsi likelihood, fungsi marginal likelihood tidak lagi mengandung parameter populasi yang pada umumnya tidak diketahui. Untuk membangun fungsi marginal likelihood, diperlukan *ancillary statistic* yang distribusinya tidak bergantung pada parameter populasi.

TUJUAN

Tujuan penulisan tugas akhir ini adalah:

1) Mencari fungsi marginal likelihood untuk proses *autoregressive*.
2) Mencari taksiran untuk parameter *autoregressive* menggunakan fungsi marginal likelihood.

METODOLOGI

Prosedur yang dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Studi Literatur
2. Pembentukan fungsi marginal likelihood untuk menaksir parameter *autoregressive*
3. Menaksir parameter AR (1) dengan fungsi marginal likelihood
4. Simulasi AR (1) Penarikan
5. kesimpulan

LANDASAN TEORI

1. Proses Circular

Definisi proses circular

Vektor dari N variabel random diberikan dengan $\mathbf{X}' = \{X_N, X_{N-1}, ..., X_1\}$, disebut proses *circular* jika mempunyai sifat-sifat distribusi seperti dibawah ini:

1. $E(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$
2. $E(X_s^2) = \sigma^2$ s = 1, 2, ...,N
3. $E(X_s X_{s+L}) = \sigma^2 \rho_L$ s = 1, 2, ...,N

dengan

$$\rho_{N+L} = \rho_{N-L} = \rho_L$$

Barisan dari nilai $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_N$ adalah barisan autokorelasi dari proses.

4. $$E(\mathbf{XX}') = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & .... & \rho_2 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 & .... & \rho_3 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 & .... & \rho_4 & \rho_3 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 & .... & \rho_1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{\Omega}$$

dengan $\mathbf{\Omega}$ adalah matriks autokovariansi yang berukuran N×N (J. Wise, 1955).

Berdasarkan definisi diatas, proses *circular* dapat disimpulkan merupakan proses yang stationer.

Matriks autokovariansi, $\mathbf{\Omega}$**,** dapat dinyatakan dalam bentuk dibawah ini:

$$\Omega = \sigma^2 \left(I + \rho_1 (W + W^{-1}) + \rho_2 (W^2 + W^{-2}) + \cdots + \rho_{\frac{1}{2}(N-1)} \left(W^{\frac{1}{2}(N-1)} + W^{-\frac{1}{2}(N-1)} \right) \right),$$

dengam N bilangan ganjil positif, atau

$$\Omega = \sigma^2 \left(I + \rho_1 (W + W^{-1}) + \rho_2 (W^2 + W^{-2}) + \cdots + \frac{1}{2} \rho_{\frac{1}{2}N} \left(W^{\frac{1}{2}N} + W^{-\frac{1}{2}N} \right) \right),$$

dengan N bilangan genap positif. Untuk semua nilai N, $\mathbf{I}$ menotasikan matriks identitas berukuran N×N dan $\mathbf{W}$ adalah *circulant definition of auxiliary identity matrix* berukuran N×N, dimana

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat dari $\mathbf{W}$ adalah $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}'$ dan $\mathbf{W}^N = \mathbf{I}$.

1. Distribusi Marginal

Definisi distribusi marginal

Jika X dan Y adalah variabel random kontinu dan f(x,y) adalah pdf bersama dari X dan Y, maka

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \quad \text{untuk } -\infty < x < \infty$$

adalah pdf marginal dari *X*, dan

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \quad \text{untuk } -\infty < y < \infty$$

adalah pdf marginal dari *Y* (J. E. Freund, 1992).

Definisi diatas dapat diperluas untuk N variabel random $X_1, X_2, ..., X_N$. Jika pdf bersama dari variabel random kontinu $X_1, X_2, ..., X_N$ adalah $f(x_1, x_2, ..., x_N)$, maka pdf marginal dari X_2 adalah

$$h(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_N) dx_1 dx_3 ... dx_N$$

untuk $-\infty < x_2 < \infty$. Pdf marginal dari X_1 dan X_N adalah

$$\varphi(x_1, x_N) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_N) dx_2 dx_3 ... dx_{N-1}$$

untuk $-\infty < x_1 < \infty \text{ dan } -\infty < x_N < \infty$.

2. Statistik

Misalkan $X_1, X_2, ..., X_N$ adalah sampel random berukuran N dari variabel random X, dimana X memiliki distribusi tertentu. Jika sembarang fungsi $Y = u(X_1, X_2, ..., X_N)$ adalah fungsi dari sampel random X yang tidak bergantung pada parameter maka fungsi $Y = u(X_1, X_2, ..., X_N)$ disebut dengan statistik (Robert V. Hogg, Joseph W. Mckean, dan Allen T. Craig, 2005). Contoh, variabel random $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ adalah statistik.

Walaupun statistik tidak bergantung pada parameter, namun distribusinya bisa saja masih bergantung pada parameter. Statistik yang distribusinya bergantung pada parameter disebut *sufficient statistic*. *Sufficient statistic* mengandung semua informasi mengenai parameter, namun ada statistik lain yang kelihatannya tidak memuat informasi mengenai parameter karena distribusinya bebas dari parameter, statistik ini disebut *ancillary statistic*.

Berikut ini diberikan penjelasan lebih rinci mengenai *ancillary statistic* karena statistik ini pada bab selanjutnya akan digunakan sebagai dasar pembentukan fungsi marginal likelihood.

2.1 *Ancillary Statistic*

Ada statistik lain yang hampir kelihatannya berlawanan dengan *sufficient statistic*. Jika *sufficient statistic* mengandung semua informasi mengenai parameter, statistik yang lain ini, disebut *ancillary statistic*, mempunyai distribusi yang bebas dari parameter dan kelihatannya tidak mengandung informasi mengenai parameter itu. Untuk ilustrasi, variansi S^2 dari sampel random yang berdistribusi $N(\theta,1)$ mempunyai distribusi yang tidak bergantung pada θ. Contoh lain, rasio $Z = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$, dimana X_1, X_2 adalah sampel random dari distribusi gamma dengan parameter $\alpha > 0$ diketahui dan parameter $\beta = \theta$ tidak diketahui, karena Z mempunyai distribusi beta yang bebas dari parameter θ, maka Z adalah *ancillary statistic* (Robert V. Hogg, Joseph W. Mckean, dan Allen T. Craig, 2005)".

Untuk menentukan apakah statistik adalah *ancillary statistic*, harus dibuktikan bahwa distribusi dari statistik tersebut bebas dari parameter populasi yang tidak diketahui. Robert V. Hogg, Joseph W. Mckean, dan Allen T. Craig, (2005), memberikan beberapa aturan sehingga dapat lebih mudah menemukan *ancillary statistic* untuk model *location-scale*.

A. Model *Location-Scale*

Misalkan variabel random $X_1, X_2, ..., X_N$ mengikuti model *Location-scale*, bentuk modelnya yaitu

$$X_i = \theta_1 + \theta_2 W_i \qquad i = 1, 2, ..., N \quad (1)$$

dengan $-\infty < \theta_1 < \infty$, $\theta_2 > 0$, dan $W_1, W_2, ..., W_N$ adalah variabel random dengan pdf $f(W)$ yang tidak bergantung pada θ_1 dan θ_2. Dengan pendefinisian seperti ini, maka θ_1 adalah *Location* parameter dan θ_2 adalah *scale* parameter.

Dari persamaan (1), $w_i = \dfrac{x_i - \theta_1}{\theta_2}$, i=1,2,...,N, maka pdf dari X_i adalah

$$g(x_i;\theta) = f(w_i)\left|\frac{dx_i}{dw_i}\right|$$

$$= \frac{1}{\theta_2} f\left(\frac{x_i - \theta_1}{\theta_2}\right) \qquad i = 1, 2, ..., N$$

adalah

Misalkan $v = u(x_1, x_2, ..., x_N)$ adalah statistik sedemikian sehingga

$$u(cx_1 + d, cx_2 + d, ..., cx_N + d) = u(x_1, x_2, ..., x_N)$$

untuk semua bilangan real d dan c>0. Maka

$$v = u(X_1, X_2, ..., X_N) = u(W_1, W_2, ..., W_N)$$

adalah fungsi dari $W_1, W_2, ..., W_N$ yang tidak tergantung pada θ_1 dan θ_2. Oleh sebab itu, v mempunyai distribusi yang tidak bergantung pada θ_1 dan θ_2. Statistik $v = u(x_1, x_2, ..., x_N)$ disebut juga *location-scale-invariant statistic*.

Berikut ini, diberikan contoh dari penggunaan model *Location-Scale* untuk membuktikan suatu statistik adalah *ancillary statistic*. Misalkan terdapat N variabel random $X_1, X_2, ..., X_N$, dapat dinyatakan sebagai:

$$X_i = \mu + \sigma e_i \qquad \text{i=1,2,...,N}$$

dimana e_i mempunyai distribusi tertentu yang tidak bergantung pada μ dan σ. Penulis telah membuktikan bahwa $d = \{d_i\} = \left\{\left(x_i - \bar{x}\right)/s_x\right\}$, i=1,2,...,N , dimana $\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i / N$ dan $s_x^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 /(N-1)$ adalah *ancillary statistic* karena distribusi dari $d = \{d_i\} = \left\{\left(x_i - \bar{x}\right)/s_x\right\}$, i=1,2,...,N tidak bergantung pada parameter μ dan σ.

3. Marginal Likelihood

Misalkan variabel random $X = \{x_i\}$, i=1,2,…,N, dengan pdf $f(x;\theta)$ dan θ=(μ,σ) adalah vektor parameter yang tidak diketahui, maka fungsi likelihood adalah sebagai berikut

$$L(\mu,\sigma;X) = f(X;\mu,\sigma)$$

Menurut Sprott D.A (2000), jika statistik $d = \{d_i\}$, i=1,2,...,N, merupakan *ancillary statistic* untuk μ, maka fungsi marginal likelihood untuk σ, $L_m(\sigma;d)$, adalah

$$L(\mu,\sigma;X) = f(X;\mu,\sigma)$$

$$= f(d,\sigma) f(X;\mu,\sigma \mid d)$$

$$= L_m(\sigma;d) L_{res}(\mu,\sigma;X)$$

dimana faktor $L_{res}(\mu,\sigma;X)$ mengandung informasi yang tidak berarti mengenai σ ketika μ tidak diketahui.

PEMBAHASAN

1. *Structural Model*

Misalkan variabel respon X dihasilkan dari suatu proses yang stabil. Variasi dalam variabel respon biasanya diakibatkan oleh: variasi dalam alat yang digunakan, variasi dalam kondisi proses, dan variasi dalam operasi dari proses. Sumber-sumber variasi ini membentuk error dari proses yang merupakan variabel random yang membutuhkan ukuran *scale*.

Misalkan x_i adalah respon ke-i, dan $v_{1i}, v_{2i}, ..., v_{ri}$ adalah *constructed variabel* yang bersesuaian dengan respon ke-i. Dan misalkan σ adalah *scaling respon* dari variabel error dan

$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ adalah kontribusi yang diberikan oleh *constructed variabel* terhadap variabel respon. Fraser (1967) memperkenalkan *structural model*. *Structural model* adalah variabel respon dari suatu proses yang stabil dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari *constructed variabel* dan variabel error, dan dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1 v_{11} + ... + \beta_r v_{r1} + \sigma e_1 \\ x_2 &= \beta_1 v_{12} + ... + \beta_r v_{r2} + \sigma e_2 \\ &\vdots \\ x_N &= \beta_1 v_{1N} + ... + \beta_r v_{rN} + \sigma e_N \end{aligned} \qquad (2)$$

1.1 Proses *Autoregressive* sebagai *Structural Model*

Pada umumnya, bentuk umum proses *autoregressive* orde p adalah

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k (X_{t-k} - \mu) = \mathrm{a}_t \qquad (\alpha_0 = 1)$$

dengan $\{X_t : t = 1, 2, ..., N\}$ adalah data runtun waktu yang stasioner, a_t adalah *white noise*, $\mathrm{a}_t \sim NIID(0, \sigma^2)$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_p)'$ adalah parameter *autoregressive* dan μ adalah *mean proses*.

Misalkan terdapat variabel random Z_t yang mempunyai mean nol, variansi 1 dan *independent* , maka σZ_t akan mempunyai mean nol dan variansi σ^2 sama halnya dengan a_t, sehingga bentuk umum proses *autoregressive* orde p dapat ditulis sebagai:

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k (X_{t-k} - \mu) = \sigma Z_t \qquad (\alpha_0 = 1)$$

Untuk ukuran sampel N, data runtun waktu yang stasioner $\{X_t; t = 1, 2, ..., N\}$, dapat dinyatakan sebagai *structural model*, yaitu:

$$\mathbf{X} = \mu \mathbf{1} + \sigma \mathbf{e} \qquad (3)$$

Dengan $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_N)'$, $\mathbf{1}' = (1, 1, ..., 1)$ dan $\mathbf{e} = (e_1, e_2, ..., e_N)'$ adalah vektor variabel error yang tidak terobservasi yang dibatasi pada pembatasan masalah berdistribusi normal.

Dengan mensubstitusi persamaan (3), maka bentuk umum proses *autoregressive* orde p dapat ditulis sebagai:

$$\sum_{s=0}^{p} \alpha_s e_{t-s} = Z_t \qquad (\alpha_0 = 1) \qquad (4)$$

Persamaan (3) dan (4) adalah proses *autoregressive* sebagai *structural model*.

2. Proses *Autoregressive* yang *Circular*

Dengan memandang **e** sebagai proses *autoregressive* yang *circular*, maka persamaan (4) untuk N observasi dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} e_N + \alpha_1 e_{N-1} + \alpha_2 e_{N-2} + ... + \alpha_p e_{N-p} &= Z_N \\ e_{N-1} + \alpha_1 e_{N-2} + \alpha_2 e_{N-3} + ... + \alpha_p e_{N-p-1} &= Z_{N-1} \\ e_{N-2} + \alpha_1 e_{N-3} + \alpha_2 e_{N-4} + ... + \alpha_p e_{N-p-2} &= Z_{N-2} \\ &\vdots \\ e_2 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_N + ... + \alpha_p e_{N-p+2} &= Z_2 \\ e_1 + \alpha_1 e_N + \alpha_2 e_{N-1} + ... + \alpha_p e_{N-p+1} &= Z_1 \end{aligned} \qquad (5)$$

Dengan menggunakan notasi matriks, persamaan (5) dinyatakan sebagai:

$$\left(\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{W} + \alpha_2 \mathbf{W}^2 + ... + \alpha_p \mathbf{W}^p\right)\mathbf{e} = \mathbf{Z} \qquad (6)$$

dengan $\mathbf{e}' = \{e_N, e_{N-1}, ..., e_2, e_1\}$ dan $\mathbf{Z}' = \{Z_N, Z_{N-1}, ..., Z_2, Z_1\}$. Dengan metode invers, maka diperoleh

$$\mathbf{e} = \left(\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{W} + \alpha_2 \mathbf{W}^2 + ... + \alpha_p \mathbf{W}^p\right)^{-1} \mathbf{Z} \qquad (7)$$

Selanjutnya akan dicari parameter dari **e** yaitu $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{e}} = E(\mathbf{e})$ dan $\boldsymbol{\Omega} = E(\mathbf{ee}')$. Dari persaamaan (7), diperoleh

$$E(\mathbf{e}) = \mathbf{0} \qquad (8)$$

dan

$$E(\mathbf{ee}') = \boldsymbol{\Omega}\,(matriks\ autokovariansi)$$
$$= \left(\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{W} + ... + \alpha_p \mathbf{W}^p\right)^{-1} \left(\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{W}^{1} + ... + \alpha_p \mathbf{W}^{p}\right)^{-1} \qquad (9)$$

Dengan demikian, jika menganggap **e** merupakan proses *autoregressive* yang *circular*, **e** berdistribusi normal dengan mean **0** dan variansi $\boldsymbol{\Omega}$, dimana $\boldsymbol{\Omega}$ adalah matriks autokovariansi dalam persamaan (9).

3. Fungsi Marginal Likelihood untuk AR (p)

Dari persamaan (8) dan (9), distribusi dari $\mathbf{e}$ tidak bergantung pada parameter μ dan σ, sehingga persamaan (3) adalah model *Location-scale*, sehingga μ adalah *location* parameter, σ adalah *scale* parameter, dan $-\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$.

Karena persamaan (3) adalah model Location-scale, maka

$$d_i = \frac{\left(x_i - \bar{x}\right)}{s_x} = \frac{\left(e_i - \bar{e}\right)}{s_e} \qquad (i = 1, 2, ..., N)$$

adalah *ancillary statistic*, sehingga distribusi marginal dari $\mathbf{d}$ hanya tergantung pada $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p)'$. Distribusi marginal dari $\mathbf{d}$ diberikan oleh (Fraser, 1968, 32)

$$L(\boldsymbol{\alpha};\mathbf{d}) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(..., s_e(N^{-\frac{1}{2}} t\mathbf{1} + \mathbf{d}), ...) s_e^{N-1} dt ds_e \quad (10)$$

Dalam penelitian ini, $\mathbf{e}$ dibatasi pada pembatasan masalah berdistribusi normal, dengan mean $\mathbf{0}$ dan variansi $\boldsymbol{\Omega}$, maka pdf dari $\mathbf{e}$, $f(\mathbf{e}; \boldsymbol{\Omega})$, adalah

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}N} \left|\boldsymbol{\Omega}\right|^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{2}\mathbf{e}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{e})$$

Dengan demikian, penyelesaian persamaan (10) adalah

$$L(\boldsymbol{\alpha};\mathbf{d}) = \left|\boldsymbol{\Omega}\right|^{-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} (C - B^2 / A)^{-\frac{1}{2}(N-1)} \quad (11)$$

dengan $NA = \mathbf{1}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{1}$, $N^{\frac{1}{2}}B = \mathbf{1}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{d}$ dan $C = \mathbf{d}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{d}$.

4. Fungsi Marginal Likelihood untuk AR (1) yang circular

Fungsi marginal likelihood dari AR (1) yang circular dapat dicari dengan menyatakan model AR (1) sebagai *structural model*, yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$e_t + \alpha_1 e_{t-1} = Z_t \qquad t = 1, 2, ..., N$$

$$\mathbf{x} = \mu\mathbf{1} + \sigma\mathbf{e}$$

Misalkan $\mathbf{e}$ sebagai proses AR (1) yang *circular*, maka $\mathbf{e} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega})$ dimana $\boldsymbol{\Omega}$ adalah matriks autokovariansi dalam persamaan (9), yaitu

$$\boldsymbol{\Omega} = (\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{W})^{-1}(\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{W}^{-1})^{-1}$$

Dalam menurunkan fungsi marginal likelihood $L(\rho;\mathbf{d})$ untuk AR (1) yang *circular* dilakukan dalam beberapa tahap.

a) Tahap pertama

Dalam tahap ini, akan dicari determinan dari matriks autokovariansi AR (1) yang *circular*. Dari persamaan (9) invers matriks autokovariansi untuk AR (1) yang *circular* adalah

$$\boldsymbol{\Omega}^{-1} = (\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{W}^{-1})(\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{W}) \qquad (12)$$

Berdasarkan sifat-sifat dari proses *circular*, $\rho_1 = -\alpha_1$, sehingga persamaan (12) menjadi

$$\boldsymbol{\Omega}^{-1} = (\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}^{-1})(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})$$

$$|\boldsymbol{\Omega}^{-1}| = \left|(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}^{-1})\right|\left|(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})\right|$$

Misalkan $P = \left|(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}^{-1})\right|$ dan $Q = \left|(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})\right|$, maka

$$\begin{aligned} \left|P\right| &= \left|(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}^{-1})\right| & Q &= \left|(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})\right| \\ &= \left|\mathbf{I}\right| - \left|\rho\mathbf{W}^{-1}\right| & &= \left|\mathbf{I}\right| - \left|\rho\mathbf{W}\right| \\ &= 1 - \rho^N \left|\mathbf{W}^{-1}\right| & &= 1 - \rho^N \left|\mathbf{W}\right| \\ &= 1 - \rho^N & &= 1 - \rho^N \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \left|\boldsymbol{\Omega}^{-1}\right| &= \left|(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}^{-1})\right|\left|(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})\right| \\ &= \left(1 - \rho^N\right)\left(1 - \rho^N\right) \\ &= \left(1 - \rho^N\right)^2 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan teorema aljabar, maka

$$\left|\boldsymbol{\Omega}\right| = \frac{1}{\left|\boldsymbol{\Omega}^{-1}\right|} = = \left(1 - \rho^N\right)^{-2}$$

(13)

b) Tahap kedua

Dalam tahap kedua ini, akan dicari $NA = \mathbf{1}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{1}$.

$$\begin{aligned} NA &= \mathbf{1}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{1} \\ &= N\left(1 - \rho\right)^2 \end{aligned} \qquad (14)$$

c) Tahap ketiga

Dalam tahap ketiga ini, akan dicari $N^{\frac{1}{2}}B = \mathbf{1'\Omega^{-1}d}$. Dengan mensubstitusi nilai Ω pada persamaan (9), maka diperoleh

$$N^{\frac{1}{2}}B = (1-\rho)^2 \sum_{i=1}^{N} d_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} d_i = d_1 + d_2 + \ldots + d_N$$

$$= \frac{x_1 - \bar{x}}{s_x} + \frac{x_2 - \bar{x}}{s_x} + \ldots + \frac{x_N - \bar{x}}{s_x}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{N-1} + x_N - n\bar{x}}{s_x}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} x_i}{s_x}$$

$$= 0$$

Jadi

$$\begin{aligned} N^{\frac{1}{2}}B &= \mathbf{1'\Omega^{-1}d} \\ &= (1-\rho)^2 \sum_{i=1}^{N} d_i \\ &= (1-\rho)^2 .0 \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (15)$$

d) Tahap keempat

Dalam tahap ini, akan dicari $C = \mathbf{d'\Omega^{-1}d}$. Dengan mensubstitusi nilai Ω pada persamaan (9), maka diperoleh

$$C = \mathbf{d'\Omega^{-1}d}$$

$$= (1+\rho^2)\sum_{i=1}^{N} d_i^2 - 2\rho \sum_{i=1}^{N} d_i d_{i+1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} d_i^2 = d_1^2 + \ldots + d_N^2$$

$$= \frac{(x_1 - \bar{x})^2}{s_x^2} + \ldots + \frac{(x_N - \bar{x})^2}{s_x^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{s_x^2}$$

$$= \frac{(N-1)s_x^2}{s_x^2}$$

$$= N - 1$$

$$r' = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i d_{i+1}}{N-1}$$, dimana $d_{N+1} = d_1$

Jadi

$$\begin{aligned} C &= \mathbf{d'\Omega^{-1}d} \\ &= (1+\rho^2)\sum_{i=1}^{N} d_i^2 - 2\rho \sum_{i=1}^{N} d_i d_{i+1} \\ &= (1+\rho^2)(N-1) - 2\rho(N-1)r' \\ &= (N-1)(1-2\rho r' + \rho^2) \end{aligned} \qquad (16)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (13), (14), (15) dan (16), sehinga diperoleh fungsi marginal likelihood untuk AR(1) yang *circular*, yaitu

$$L(\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{d}) = |\boldsymbol{\Omega}|^{-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} \left(C - \frac{B^2}{A}\right)^{-\frac{1}{2}(N-1)}$$

$$L(\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{d}) = (1-\rho^N)(1-\rho)^{-1}(N-1)^{-\frac{1}{2}(N-1)}(1-2\rho r' + \rho^2)^{-\frac{1}{2}(N-1)} \qquad (17)$$

5. Estimasi Parameter AR dengan Fungsi Marginal Likelihood

Taksiran parameter *autoregressive* diperoleh dengan memaksimumkan persamaan (11). Secara matematis, estimasi maksimum marginal likelihood lebih mudah dilakukan dengan memanipulasi persamaan (11) menjadi logaritma fungsinya. Memaksimumkan fungsi marginal likelihood ekivalen dengan memaksimumkan logaritma fungsi marginal likelihood.

Untuk mencari nilai taksiran parameter $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_p)'$ yang memaksimumkan persamaan (11), maka pendekatan yang paling sering digunakan adalah menentukan turunan parsial dari logaritma fungsi marginal likelihood untuk setiap parameter lalu menyamakan dengan nol,

$$\frac{\partial \ln(L(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}))}{\partial \alpha_i} = 0 \quad \text{untuk i=1,2,…,p} \qquad (18)$$

Berdasarkan persamaan (18), akan diperoleh persamaan sebanyak parameter yang tidak diketahui. Taksiran ini dapat diselesaikan secara bersamaan. Jika penyelesaian dari fungsi turunan parsial tidak dapat ditemukan, maka pendekatan numerik dilakukan.

a. **Estimasi Parameter AR (1) yang *Circular***

Fungsi marginal likelihood untuk AR (1) yang *circular* deiberikan pada persamaan (17). Berdasarkan persamaan (18), parameter AR (1) diperoleh dengan menurunkan logaritma dari fungsi marginal likelihood terhadap ρ lalu menyamakan dengan nol,yaitu:

$$\frac{dLn\left(L(\rho;\boldsymbol{d})\right)}{d\rho}=0$$

$$\frac{-N\rho^{N-1}}{1-\rho^{N}}+\frac{1}{1-\rho}+\frac{(N-1)(r'-\rho)}{1-2\rho r'+\rho^{2}}=0$$

$$\frac{-N\rho^{N-1}(1-\rho)(1-2\rho r'+\rho^{2})}{(1-\rho^{N})(1-\rho)(1-2\rho r'+\rho^{2})}+\frac{(1-\rho^{N})(1-2\rho r'+\rho^{2})}{(1-\rho^{N})(1-\rho)(1-2\rho r'+\rho^{2})}+\frac{(N-1)(r'-\rho)(1-\rho^{N})(1-\rho)}{(1-\rho^{N})(1-\rho)(1-2\rho r'+\rho^{2})}=0$$

Taksiran ρ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$$-N\rho^{N-1}(1-\rho)(1-2\rho r'+\rho^{2})+(1-\rho^{N})(1-2\rho r'+\rho^{2})+(N-1)(r'-\rho)(1-\rho^{N})(1-\rho)=0 \quad (19)$$

dengan syarat

$$(1-\rho^{N})(1-\rho)(1-2\rho r'+\rho^{2})$$

Persamaan (19) merupakan persamaan polinomial dari ρ derajat N+2, sehingga akan diperoleh N+2 nilai akar dari persamaan tersebut. Karena ρ adalah korelasi maka nilainya akan terletak pada interval $-1\le\rho\le1$, sehingga taksiran untuk ρ diperoleh dengan mengambil nilai akar yang terlatak dalam interval tersebut.

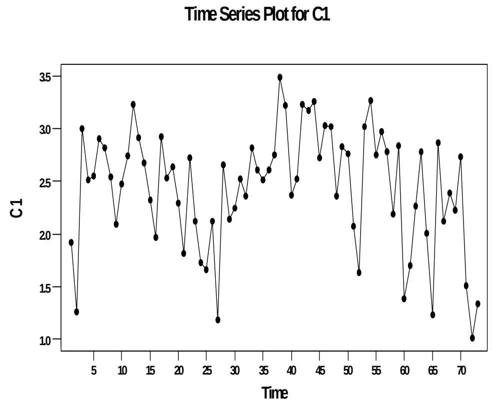
PENERAPAN

Untuk mendapatkan taksiran parameter *autoregressive* dengan fungsi marginal likelihood, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

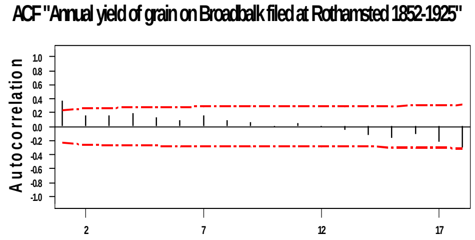
1. Penyedian data runtun waktu yang stasioner yang dapat dimodelkan dengan proses *autoregressive* orde 1
2. Melakukan penaksiran parameter *autoregresive*

Data yang digunakan adalah data "*Annual yield of grain on Broadbalk field at Rothamsted* 1852-1925". Data "*Annual yield of grain on Broadbalk filed at Rothamsted* 1852-1925" terdiri dari 73 pengamatan. Sebelum dilakukan penaksiran parameter *Autoregressive*, penulis terlebih dahulu memaparkan bahwa data tersebut bersifat stasioner dan dapat dimodelkan dengan proses *autoregressive* orde 1 (identifikasi model).

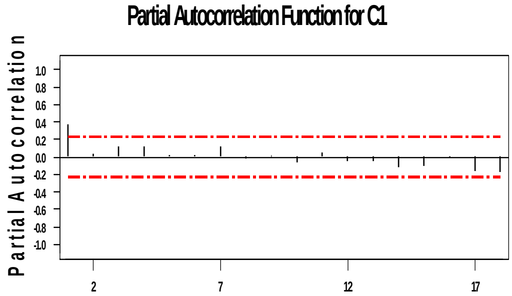
Berdasarkan gambar, data yang stasioner bersifat acak (tidak memiliki trend atau musiman). Secara definitif, kondisi stasioner AR (1) adalah nilai mutlak parameter AR (1) kurang dari satu. Plot dari data ini, menunjukkan bahwa data tersebut stasioner. Plot dari data tersebut diberikan dibawah ini:



Untuk proses *autoregressive*, identifikasi model dapat dilihat dari plot ACF (*Autocorrelation Function*) dan PACF (*Partial Autocorrelation Function*). Suatu data runtun waktu dapat dimodelkan dengan proses *autoregressive* jika bentuk ACF dari data tersebut menurun secara eksponensial seiring dengan pertambahan lag dan PACF menunjukkan orde dari proses *autoregressive* tersebut. Dibawah ini diberikan plot ACF dan PACF dari data "*Annual yield of grain on Broadbalk filed at Rothamsted* 1852-1925".



Lag	Corr	T	LBQ	Lag	Corr	T	LBQ	Lag	Corr	T	LBQ
1	0.36	3.09	9.98	8	0.09	0.62	21.09	15	-0.17	-1.18	26.24
2	0.15	1.16	11.76	9	0.05	0.36	21.32	16	-0.11	-0.75	27.45
3	0.16	1.16	13.66	10	-0.02	-0.13	21.35	17	-0.22	-1.47	32.31
4	0.19	1.36	16.39	11	0.04	0.27	21.49	18	-0.31	-1.98	41.81
5	0.13	0.92	17.71	12	-0.01	-0.06	21.49				
6	0.09	0.62	18.33	13	-0.06	-0.40	21.80				
7	0.16	1.11	20.41	14	-0.13	-0.89	23.37				



Lag	PAC	T	Lag	PAC	T	Lag	PAC	T
1	0.36	3.09	8	-0.03	-0.26	15	-0.12	-0.99
2	0.02	0.21	9	-0.00	-0.01	16	-0.01	-0.08
3	0.11	0.92	10	-0.08	-0.66	17	-0.17	-1.41
4	0.11	0.94	11	0.04	0.32	18	-0.19	-1.63
5	0.02	0.17	12	-0.06	-0.51			
6	0.02	0.13	13	-0.05	-0.44			
7	0.11	0.95	14	-0.12	-1.05			

Dari plot diatas dapat disimpulkan bahwa data tersebut merupakan proses *autoregressive* orde 1.

Fungsi marginal likelihood untuk AR (1), jika variabel error dianggap sebagai proses yang *circular*, diberikan pada persamaan (17). Berdasarkan data tersebut, diperoleh $r' = 0.386997703$, dengan $r' = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i d_{i+1}}{N-1}$, $d_{N+1} = d_1$.

Sehingga fungsi marginal likelihood untuk data ini, jika variabel error adalah proses yang *circular* adalah

$$L(\rho; d) = \left(1 - \rho^{73}(1-\rho)^{-1} 72^{-\frac{72}{2}} (1 - 0.773995406\rho + \rho^2)^{-\frac{72}{2}}\right)$$

Dengan menyelesaikan persamaan di atas, diperoleh taksiran parameter *autoregressive* dengan fungsi marginal likelihood jika variabel error dianggap sebagai proses yang *circular* adalah 0.4069178784.

Untuk perbandingan, dengan menggunakan *software* "PhiCast" diperoleh taksiran α_1 dengan fungsi maksimum likelihood adalah 0.381463 dan dengan metode moment diperoleh α_1 = 0.362229782. Dengan demikian, estimasi parameter *autoregressive* dengan fungsi marginal likelihood mendukung estimasi titik dari motode-metode penaksiran parameter *autoregressive* yang sudah ada.

KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh dalam penelitian ini adalah:

1) Proses *Autoregressive* dapat dinyatakan sebagai *structural model*, sehingga data runtun waktu stasioner merupakan kombinasi linear dari *mean* proses dan variabel error yang tidak terobservasi.
2) Dengan mengganggap variabel error sebagai proses *circular* diperoleh sifat distribusi dari variabel error tidak bergantung pada parameter populasi, sehingga data runtun waktu mengikuti model *Location-scale*.
3) Dengan menggunakan *model Location*-Scale, vektor data runtun waktu yang distandarisasi merupakan *ancillary statistic* untuk μ dan σ.
4) Karena distribusi dari *ancillary statistic* bebas dari parameter populasi, maka *ancillary statistic* merupakan dasar untuk membangun fungsi marginal likelihood yang hanya bergantung pada parameter *Autoregressive*.
5) Estimasi parameter AR dengan fungsi marginal likelihood mendukung estimasi titik dari

metode-metode penaksiran parameter AR yang sudah ada.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. (1994). *Elementary Linear Algebra*, New Jersey: John Wiley.

Box, G. E. P., Jenkins, G. M., dan Reinsel, G. C. (1994). *Time Series Analysis Forecasting and Control*, New Jersey: Prantice Hall.

Craig, A.T., Hogg, R.V., dan McKean, J.W. (2005). *Introduction to Mathematical Statistics*, New Jersey: Prentice Hall.

Cryer, J. D. (1986). *Time Series Analysis*, Boston: PSW Publisher.

Freund, J. E. (1992). *Mathematical Statistics*, New Jersey: Prentice Hall.

Gujarati, Damondar N. *Essensial Econometrics*. McGraw-Hill, New York, USA. 2006.

Harville, D. A. (1997). *Matrix Algebra from A statistician's Perspective*, New York: Springer.

Hyndman, R.J. (n.d.) *Time Series Data Library*, http://robjhyndman.com/TSDL/, 3 November 2009. pk. 10.02.

Sprott, D. A. (2000). *Statistical Inference in Science*, New York: Springer.

Wise, J. (1955). The Autocorrelation Function and the spectral Density Function. *Biometrika* 42. 151-159.